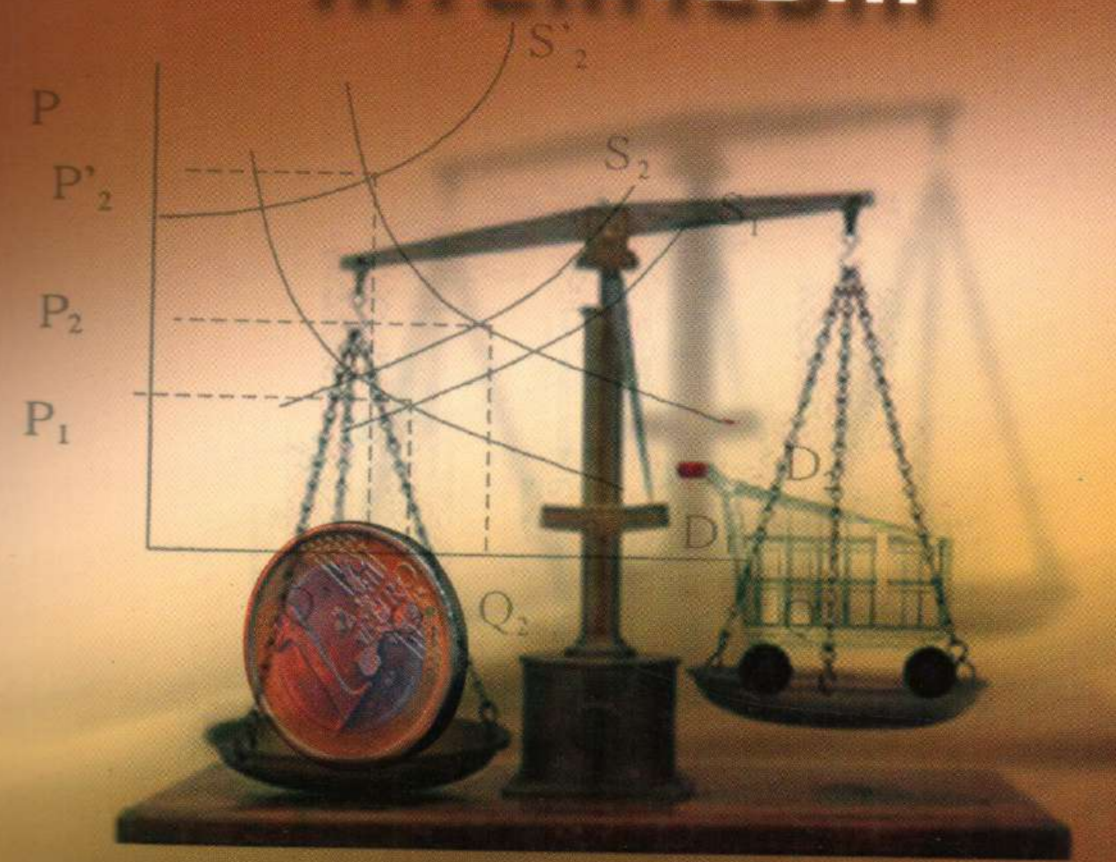
Miguel Angel Alonso · Rafael Barberá · Manuel Blanca
Francisco José Blanco · Luis Miguel Doncel · Nuria Gómez
Miguel González Blanch · Pilar Grau · Rosa Santero

PRÁCTICAS DE MICROECONOMÍA INTERMEDIA







Prácticas de microeconomía intermedia

Miguel Ángel Alonso
Rafael A. Barberá
Manuel Blanca
Francisco José Blanco
Luis Miguel Doncel
Miguel Ángel González-Blanch
Nuria Elena Gómez
Pilar Grau
Rosa Santero
Departamento de Economía. Área de Economía Aplicada.
Universidad Rey Juan Carlos



Septiembre 2002



M.ª Teresa Freire Rubio
Directora de la Colección Biblioteca de Economía y Finanzas

Avda. de Valdenigrales, s/n - 28223 Pozuelo de Alarcón (Madrid)
Tel.: 91 452 41 00 - Fax: 91 352 85 34

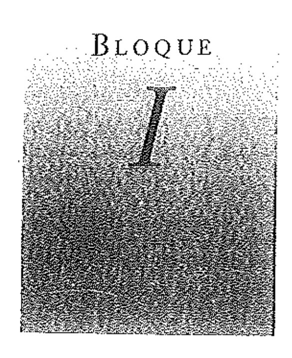
ISBN: 84-7356-314-X
Depósito Legal: M. 41.607-2002
Portada: Gerardo Domínguez
Preimpresión: LH. Estudio Gráfico, S.L.

Imprime: Gráficas Dehon
La Morera, 23-25
28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)

Impreso en España

Índice

BLOQUE



Introducción: El mercado

Capítulo 1: Las funciones de oferta y demanda y el equilibrio del mercado

Capítulo 1
Las funciones de oferta y demanda y el equilibrio del mercado

CONCEPTOS CLAVE

El comportamiento del individuo como consumidor se resume en su función de demanda. La **función de demanda** individual expresa la relación entre la cantidad demandada de un bien por un individuo y el precio de dicho bien.

En un mercado donde existan un número determinado de consumidores, la **función de demanda del mercado,** expresada como $Q_d = D(P)$, indica la relación entre la cantidad demandada total en el mercado y el precio del bien, y se calcula como la suma horizontal de las funciones de demanda individuales, es decir, para cada precio se suman las cantidades demandadas por cada individuo que compone el mercado.

Generalmente, la función de demanda del mercado tiene pendiente negativa, lo cual indica que ante una variación en el precio, la cantidad demandada total del bien varía en sentido contrario al precio. Esta relación inversa se denomina **ley de la demanda.**

La función de demanda puede desplazarse por varios motivos:

1. Cambio en la renta de los consumidores: si aumenta la renta y el bien es normal, aumenta la demanda desplazándose hacia la derecha; si el bien fuese inferior la demanda se reduciría desplazándose hacia la izquierda.
2. Cambio en los precios de otros bienes: si el precio de un bien sustitutivo aumenta, la demanda aumenta, desplazándose hacia la derecha; si se trata de un aumento del precio de un bien complementario, la demanda disminuye, mientras que si se trata de bienes independientes, no se produce desplazamiento de la función de demanda.
3. Cambio en el gusto de los consumidores: si el bien es más preferido por los consumidores la demanda se desplaza a la derecha, es decir, aumenta.

El comportamiento del individuo o de la empresa, como productor, se resume en su función de oferta. La **función de oferta** individual expresa la relación entre la cantidad ofrecida de un bien por una empresa y el precio de dicho bien.

En un mercado, donde existe un número determinado de empresas, la **función de oferta del mercado**, expresada como $Q_s = S(P)$, indica la relación entre la cantidad ofertada total en el mercado y el precio del bien y se calcula como la suma horizontal de las funciones de oferta individuales, es decir, para cada precio, se suman las cantidades ofertadas por cada empresa que compone el mercado. La relación entre precio y cantidad es positiva, por lo que la pendiente de esta función es positiva.

En el caso de la función de oferta, los desplazamientos de la misma pueden venir provocados por los siguientes motivos:

1. Cambio en el precio de los factores productivos: ante un aumento del precio de un factor productivo, la oferta disminuye, se desplaza hacia la izquierda.

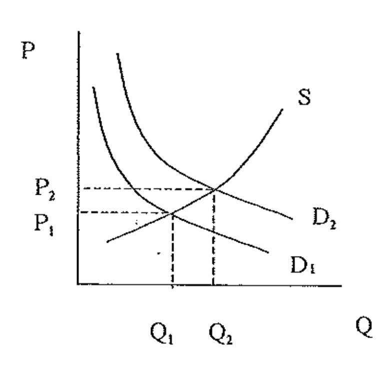
2. Cambio tecnológico: cuando se produce un avance tecnológico, la oferta aumenta desplazándose hacia la derecha.

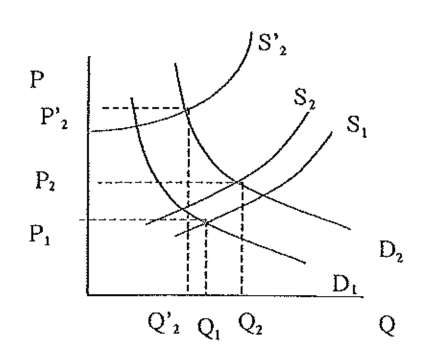
Es importante distinguir desplazamientos de demanda u oferta, por alguno de los motivos anteriormente expuestos, respecto a un desplazamiento a lo largo de la demanda, que vendrá provocado por cambios en la oferta y respecto a un desplazamiento a lo largo de la oferta que vendrá provocado por cambios en la demanda.

El **equilibrio en el mercado** se produce cuando la demanda y oferta se igualan. Se obtienen un precio y una cantidad de equilibrio tales que:

$S(P) = D(P) \Rightarrow Q_s = Q_d = Q^*$ y sustituyendo en las funciones de oferta o de demanda se obtendrá P^*.

El equilibrio del mercado puede cambiar si se producen desplazamientos de las funciones de demanda y/u oferta, o por desplazamientos simultáneos de ambas funciones. En este último caso, o bien el precio, o bien la cantidad quedará indeterminada dependiendo de la cuantía de los desplazamientos de ambas curvas.





En el gráfico de la izquierda, puede observarse cómo un aumento en la demanda, desplazamiento hacia la derecha de la misma, provoca un aumento de la cantidad y el precio de equilibrio. El gráfico de la derecha, representa un desplazamiento simultáneo de oferta y demanda. En este caso, el aumento de la demanda junto con la disminución de la oferta provocan un aumento en el precio de equilibrio, pero la cantidad demandada de equilibrio queda indeterminada. Si el desplazamiento fuese S_2 la cantidad aumentaría, mientras si llegase a S_2^1, la cantidad se reduciría.

Una forma de recoger la sensibilidad de la cantidad demandada frente a variaciones en el precio nos lo da el concepto de **elasticidad precio** de la demanda y de la oferta. La elasticidad precio mide el cambio porcentual de la cantidad ante un cambio porcentual del precio.

La **elasticidad arco de la demanda respecto al precio** se define como el cambio porcentual medio en la cantidad demanda dividido por el cambio porcentual medio en el precio. Se calcula como:

$$\varepsilon_P = \frac{\dfrac{\Delta Q}{(Q_1+Q_2)/2}}{\dfrac{\Delta P}{(P_1+P_2)/2}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2}$$

Si $|\varepsilon_P| > 1$, se denomina precio-elástica, y en este caso, el precio y el ingreso varían en sentidos opuestos.

Si $|\varepsilon_P| < 1$, se denomina precio-inelástica, y en este caso, el precio y el ingreso varían en el mismo sentido.

Si $|\varepsilon_P| = 1$, se denomina elasticidad unitaria, y en este caso, los cambios en los precios no afectan a los ingresos.

La elasticidad arco de la oferta respecto al precio se calcula del mismo modo, utilizando como cantidades, las ofertadas para los distintos precios.

TEST

1. Considere que en el mercado del bien *X* se producen, de forma simultánea, una subida en el precio de un bien sustitutivo *Y* así como una mejora tecnológica en el proceso de producción del bien considerado *X*. Como consecuencia de ello podremos esperar que en el equilibrio de mercado del bien *X*:

a) El precio y la cantidad aumenten.

b) El precio suba y la cantidad quede indeterminada.

c) La cantidad aumente y quede indeterminado el efecto sobre el precio.

d) El precio disminuya y quede indeterminado el efecto sobre la cantidad.

2. Suponga que debido a un prolongado periodo de lluvias, se estropea la mayoría de la cosecha de cítricos, reduciéndose la oferta de los mismos. Así mismo, el Estado realiza una importante campaña publicitaria que provoca un incremento en la demanda. A partir de estos datos es de esperar que en el mercado de cítricos:

a) Aumente la cantidad y se reduzca el precio.

b) Aumente el precio y la cantidad quede indeterminada.

c) Se reduzcan tanto la cantidad como el precio.

d) Quede indeterminado el precio y aumente la cantidad.

3. La función inversa de demanda de un bien viene dada por la ecuación $P = 100 - X$, siendo P el precio del bien y X la cantidad demandada de dicho bien. Si la cantidad demandada aumentase de 20 a 30 unidades:

a) La elasticidad arco de la demanda será –3.

b) Nos encontramos en un tramo elástico de demanda.

c) El ingreso total aumentaría.

d) Todas las respuestas son correctas.

4. Señale cuál de las siguientes afirmaciones en relación a la función de demanda de un bien es correcta:

a) Una mejora tecnológica desplazará la función de demanda hacia la derecha.

b) Un aumento en el precio de un bien complementario desplazará la función de demanda a la izquierda.

c) Un cambio en los gustos de los consumidores producirá un movimiento a lo largo de la función de demanda sin desplazarla.

d) Si el bien es normal, un aumento de la renta hará que la función de demanda se desplace a la izquierda.

5. Partiendo de una situación de equilibrio en el mercado del bien X se produce una disminución del precio de una materia prima utilizada en su producción, en ese caso indique la opción correcta:

a) Cuanto más elástica es la función de demanda menor es la variación en el precio.

b) Cuanto más elástica es la función de demanda menor es el efecto sobre la cantidad de equilibrio.

c) El precio de equilibrio cambiará pero no la cantidad de equilibrio.

d) La función de demanda se desplaza permaneciendo la cantidad demandada inalterada.

Soluciones

1. c	2. b	3. d	4. b	5. a

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Las funciones de demanda y oferta de hamburguesas tienen las siguientes ecuaciones:

$X_h^d = 1.000 - 2R - 0{,}1P - 5P_h$

$X_h^s = 200 + 4P_h - 2C$

Donde: C = precio de carne picada

P = precio del kg. de patatas fritas

R = renta del individuo

X_h^d = unidades de hamburguesas demandadas

X_h^s = unidades de hamburguesas ofertadas

P_h = precio de la hamburguesa

Inicialmente tenemos los siguientes datos: R=100, P=100 y C=5.

a) Calcule analítica y gráficamente las funciones de demanda y oferta de hamburguesas y el equilibrio inicial.

b) Si la renta del individuo aumentase a 200 unidades monetarias (u.m.), ¿cómo cambia la respuesta del apartado anterior? ¿Qué tipo de bien es una hamburguesa para el individuo que estamos analizando?

c) Partiendo del apartado a), el precio de la carne picada es ahora de 10 unidades monetarias, indique analítica y gráficamente cómo cambia el equilibrio.

d) De nuevo, partiendo de la situación inicial, se produce un aumento del precio de las patatas fritas a 150 u.m. el kg. ¿Cómo cambia el equilibrio

respecto al de la situación inicial? ¿Qué relación existe entre las hamburguesas y las patatas fritas?

e) Calcule la elasticidad arco de la demanda utilizando los resultados anteriores. ¿Qué tipo de elasticidad tiene? ¿Qué ocurriría con los ingresos?

Solución:

a) Para calcular las funciones de demanda y oferta de hamburguesas, sustituimos los valores iniciales de R, P y C.

$X_h^d = 1.000 - 2 \cdot 100 - 0,1 \cdot 100 - 5P_h \Rightarrow X_h^d = 790 - 5P_h$

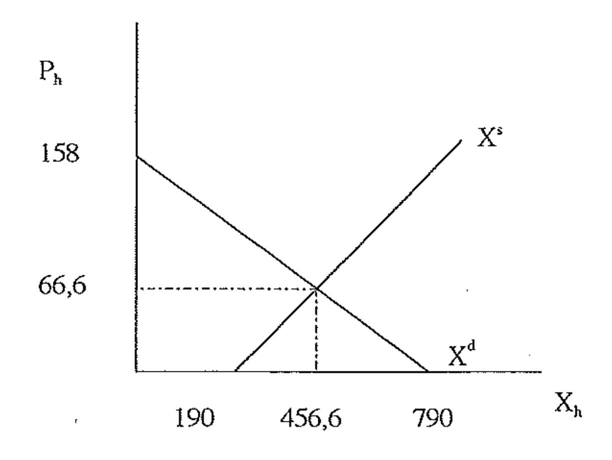
$X_h^s = 200 + 4P_h - 2 \cdot 5 \Rightarrow X_h^s = 190 + 4P_h$

Una vez que tenemos las ecuaciones de oferta y demanda iniciales, calculamos el precio y la cantidad de equilibrio igualando oferta a demanda.

$X_h^d = X_h^s \Rightarrow 790 - 5P_h = 190 + 4P_h \Rightarrow 600 = 9P_h \Rightarrow 66,\hat{6}$

$X_h^d = X_h^s = 456,\hat{6}$

Gráficamente:



b) Al cambiar la renta del individuo, se ve directamente afectada la función de demanda de hamburguesas. Partiendo de la ecuación de la demanda:

$X_h^d = 1000 - 2 \cdot R - 0,1 \cdot P - 5P_h$

Y sustituyendo los valores iniciales, junto con la nueva renta, obtenemos la nueva función de demanda:

$X_h^d = 1000 - 2 \cdot 200 - 0,1 \cdot 100 - 5P_h \Rightarrow X_h^d = 590 - 5P_h$

En este caso, la función de demanda se está desplazando hacia el origen. Está disminución de la demanda, nos indica que las hamburguesas son un bien inferior, ya que un aumento de la renta del individuo provoca una menor demanda.

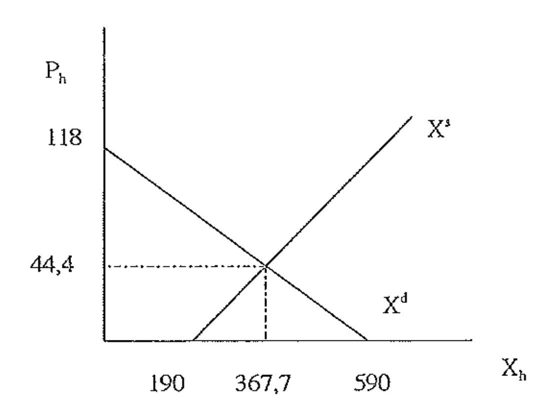
El nuevo equilibrio será:

$X_h^d = X_h^s \Rightarrow 590 - 5P_h = 190 + 4P_h \Rightarrow 400 = 9P_h \Rightarrow P_h = 44,\hat{4}$

$X_h^d = X_h^s = 367,\hat{7}$

El desplazamiento de la demanda, provoca una disminución tanto del precio como de la cantidad de equilibrio.

Gráficamente:



c) Partiendo de la situación inicial aumenta el precio de la carne picada, materia prima del bien que estamos analizando, las hamburguesas, por lo tanto se produce un cambio en la función de oferta:

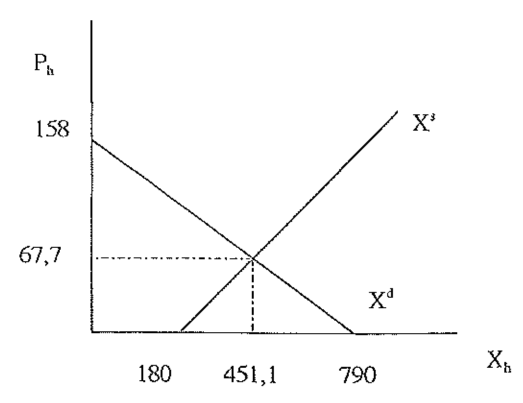
$X_h^s = 200 + 4P_h - 2 \cdot 10 \Rightarrow X_h^s = 180 + 4P_h$

En este caso, se produce un desplazamiento paralelo de la función de oferta hacia la izquierda, esto es, una disminución de la oferta. El nuevo precio de equilibrio aumentará y la cantidad de equilibrio disminuirá.

$X_h^d = X_h^s \Rightarrow 790 - 5P_h = 180 + 4P_h \Rightarrow 610 = 9P_h \Rightarrow P_h = 67,\hat{7}$

$X_h^d = X_h^s = 451,\hat{1}$

Gráficamente:



d) Partiendo de la situación inicial, cambia el precio de las patatas fritas, variable explicativa de la función de demanda. La nueva ecuación será:

$X_h^d = 1.000 - 2 \cdot 100 - 0,1 \cdot 150 - 5P_h \Rightarrow X_h^d = 785 - 5P_h$

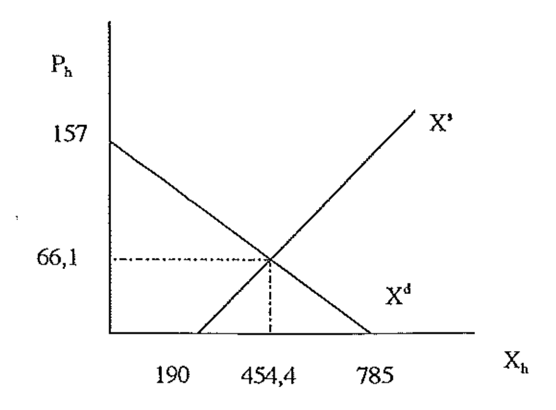
Con esta variación, la función de demanda se ha desplazado hacia la izquierda. Puesto que se trata de una disminución de la demanda, las patatas y las hamburguesas son bienes complementarios, ya que al aumentar el precio de las patatas disminuye la cantidad demandada de hamburguesas.

El nuevo precio y cantidad de equilibrio son:

$X_h^d = X_h^s \Rightarrow 785 - 5P_h = 190 + 4P_h \Rightarrow 595 = 9P_h \Rightarrow P_h = 66,\hat{1}$

$X_h^d = X_h^s = 454,\hat{4}$

Gráficamente:



e) Para calcular la elasticidad arco de la demanda utilizamos el punto de equilibrio inicial y cualquier otro punto sobre la misma función de demanda. Utilizamos el resultado del apartado c), donde cambia el precio y la cantidad de equilibrio sobre la demanda inicial.

$$\varepsilon_{P,D} = \frac{\Delta X}{\Delta P} \cdot \frac{P_1 + P_2}{X_1 + X_2} = -5 \cdot \frac{66,6 + 67,7}{456,6 + 451,1} = -0,74$$

Nos encontramos en un tramo inelástico de la función de demanda, puesto que la elasticidad obtenida es, en valor absoluto, menor que la unidad. En este caso, podemos saber que el precio y los ingresos se moverán en el mismo sentido.

Problemas propuestos

1. Suponga que del bien X, cuando el precio es 65 se demandan 20 unidades del mismo, y si el precio baja a 35 la cantidad demandada pasa a ser 40. Con estos datos:

a) Obtener la ecuación de la curva de demanda suponiendo que ésta es lineal.

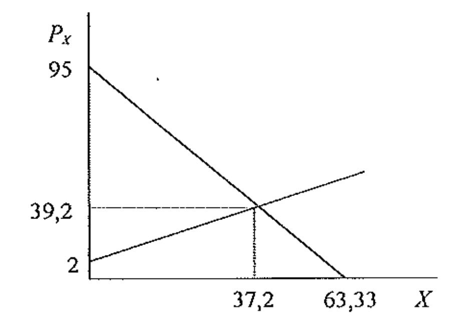
b) Sabiendo que la curva de oferta es $P = 2 + X$, obtenga el equilibrio de mercado y represéntelo gráficamente.

c) Calcular la elasticidad arco de la demanda para los datos del enunciado.

Solución

a) La ecuación de la curva de demanda es $P = 95 - 1,5X$.

b) El punto de equilibrio es $X = 37,2$ y $P = 39,2$.



c) La elasticidad arco de la demanda es -1,1.

2. Un mercado está compuesto por dos oferentes y dos demandantes cuyas funciones de oferta y demanda individual son las siguientes:

$$D_A \Rightarrow P = 10 - 2Q_A \qquad D_B \Rightarrow P = 5 - Q_B$$
$$S_A \Rightarrow P = 2 + 3Q_A \qquad S_B \Rightarrow P = 5 + Q_B$$

a) Calcule las funciones de oferta y demanda del mercado.

b) ¿Cuál es el precio y la cantidad de equilibrio en este mercado?

Solución:

a) Función de demanda del mercado:

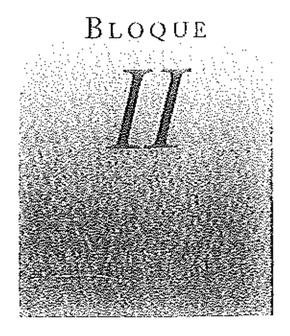
$$P = 10 - 2Q \quad si \quad Q \leq 2{,}5$$
$$P = \frac{20 - 2Q}{3} \quad si \quad Q \geq 2{,}5$$

La función de oferta del mercado:

$$P = 2 + 3Q \quad si \quad Q \leq 1$$
$$P = \frac{17 + 3Q}{4} \quad si \quad Q \geq 1$$

b) Q = 23/11 y P = 64/11

BLOQUE



Teoría del consumo

Capítulo 2: El equilibrio del consumidor y la demanda del mercado • Capítulo 3: La teoría del comportamiento del consumidor • Capítulo 4: El factor tiempo y el equilibrio del consumidor

Capítulo 2
El equilibrio del consumidor y la demanda del mercado

CONCEPTOS CLAVE

El comportamiento del consumidor viene caracterizado por dos elementos, sus **gustos** que se reflejan en las curvas de indiferencia y en su función de utilidad, y por su **capacidad de compra**, que se resume en la restricción presupuestaria, que depende de su renta y de los precios de los bienes.

Se define una **cesta de mercado** como un conjunto de cantidades de los diferentes bienes existentes en la economía.

Una **curva de indiferencia** representa el conjunto de cestas de mercado para las que la satisfacción del consumidor es la misma, es decir, es indiferente entre cualquiera de ellas. El conjunto de todas las curvas de indiferencia del consumidor es el **mapa de indiferencia**. Las curvas de indiferencia habituales tienen pendiente negativa, son convexas respecto del origen y representan un nivel de satisfacción mayor cuanto más lejos del origen estén situadas.

La pendiente de la curva de indiferencia, denominada **Relación Marginal de Sustitución** (RMS), mide la relación de intercambio entre dos bienes mientras se mantiene constante la utilidad del individuo:

$$RMS = \left.\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right|_{\bar{U}}.$$

Respecto a los gustos del consumidor, queda por definir la **función de utilidad**, $U = U(X, Y)$, función que relaciona la cantidad consumida de los bienes con un número que indica la utilidad o la satisfacción del consumidor. Se mide en unidades subjetivas denominadas útiles.

Una vez que el individuo tiene una ordenación clara de las cestas de mercado según sus gustos, a través de la función de utilidad y de las curvas de indiferencia, debe plantearse qué cestas puede comprar con su renta a los precios de mercado de los bienes. La **restricción presupuestaria** señala las cestas de mercado que el consumidor puede comprar con su renta (R), y dados los precios de los bienes (P_X y P_Y):

$$R = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y$$

Gráficamente, la restricción presupuestaria es una recta, cuya pendiente representa los precios relativos de los bienes

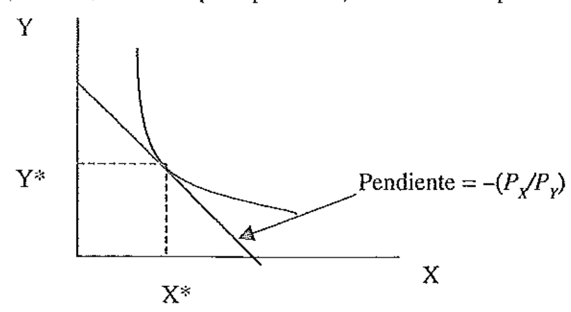
$\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)$

y cuyos puntos de corte con los ejes indican la cantidad máxima de cada bien que se podría comprar gastando toda la renta en ese bien.

El consumidor decidirá qué cesta consumir eligiendo, de aquéllas que puede comprar la que le proporcione un nivel de utilidad mayor. En el caso de que la cesta óptima contenga cantidades positivas de ambos bienes, es decir, sea una **solución interior**, se cumple la condición de óptimo:

$$RMS = -\frac{P_X}{P_Y}.$$

Cuando la pendiente de la curva de indiferencia más alejada del origen coincide con la pendiente de la restricción presupuestaria, se obtiene el óptimo.



Puede ocurrir que la solución óptima para un consumidor sea que gaste toda su renta en un único bien, ese es el caso de una **solución esquina**. En este caso, las pendientes de la curva de indiferencia y la restricción presupuestaria no tienen por qué coincidir.

Partiendo del punto óptimo del consumidor, cabe plantearse qué ocurre con las cantidades consumidas de los bienes cuando cambia el precio del bien. Si mantenemos constantes la renta del individuo y el precio de uno de los bienes, al analizar cómo cambia la cantidad demandada del otro bien cuando varía su propio precio se obtiene **la curva de demanda** de dicho bien.

Matemáticamente, se busca la cantidad del bien que demanda el consumidor para cada precio de dicho bien, utilizando la condición de óptimo y la restricción presupuestaria.

Partiendo de dicha curva de demanda, podremos calcular la demanda del mercado sumando horizontalmente (en cantidades) las demandas individuales.

La **elasticidad arco cruzada de la demanda** mide el cambio porcentual medio en la cantidad demandada de un bien en relación con el cambio porcentual medio en el precio del otro bien:

$$\varepsilon_{X,PY} = \frac{\Delta X}{\Delta P_Y} \cdot \frac{P_{Y_1} + P_{Y_2}}{X_1 + X_2}$$

Si $\varepsilon_{X,P_Y} < 0$, X e Y son bienes complementarios brutos.

Si $\varepsilon_{X,P_Y} > 0$, X e Y son bienes sustitutivos brutos.

Si $\varepsilon_{X,P_Y} = 0$, X e Y son bienes independientes.

TEST

1. Dada la restricción presupuestaria de un consumidor entre dos bienes X e Y representados en sus respectivos ejes, se produce un incremento de un 2% en los precios de ambos bienes, esto dará lugar a:

a) Una restricción presupuestaria nueva paralela a la anterior y más alejada del origen.

b) Una restricción presupuestaria nueva donde sólo cambia el punto de corte con el eje de abscisas que es menor al de la anterior.

c) Una restricción presupuestaria nueva donde sólo cambia el punto de corte con el eje de ordenadas, que es menor al de la anterior.

d) Una restricción presupuestaria nueva paralela a la anterior y más cercana al origen.

2. Dada la función de utilidad U = XY. Si los precios de los bienes son $P_X = 1$, $P_Y = 1$ y la renta del individuo es 10 u.m. El individuo decidirá consumir:

a) $X = 5$, $Y = 5$.

b) $X = 10$, $Y = 10$.

c) $X = 0$, $Y = 10$.

d) $X = 10$, $Y = 1$.

3. Un consumidor para desplazarse a su puesto de trabajo puede elegir entre dos bienes entre los que es indiferente, viajar en tren o autobús. La elasticidad cruzada de la demanda entre ambos bienes es positiva. Señale la respuesta correcta:

a) Si los precios de ambos bienes coinciden, el consumidor podrá elegir cualquier combinación de ambos bienes siempre que cumpla su restricción presupuestaria.

b) Si el precio del tren es superior al del autobús, el consumidor estará en un óptimo gastando toda su renta en el tren.

c) Independientemente de cuáles sean los precios de los bienes, al ser bienes complementarios optimizará su situación consumiendo la misma cantidad de ambos bienes.

d) Independientemente de cuáles sean los precios de los bienes, al ser sustitutivos siempre estará optimizando cuando se encuentre en una solución esquina.

4. Señale la afirmación INCORRECTA:

a) Si todos los precios suben un 10%, la restricción presupuestaria se desplazará paralelamente hacia el origen.

b) Si se duplican los precios de todos los bienes, pero la renta monetaria no varía, la restricción presupuestaria se desplaza hacia el origen sin cambiar su pendiente.

c) Si se duplican la renta y todos los precios de los bienes la restricción presupuestaria de desplaza hacia fuera del origen.

d) Una subida de la renta, con los precios constantes, desplaza la restricción presupuestaria a la derecha sin variar la pendiente.

5. Señale la afirmación correcta:

a) Si la variación en el consumo de X, tiene el mismo signo que una variación del precio de Y, entonces X e Y son complementarios.

b) Si la variación en el consumo de X, tiene el mismo signo que una variación en el precio de Y, ambos bienes, X e Y, son sustitutivos.

c) Si cuando disminuye el precio de Y, la cantidad demandada de X se mueve en el mismo sentido, ambos bienes son complementarios.

d) Si cuanto varía el precio de Y, no se produce variación en la cantidad demandada de X, entonces ambos bienes son complementarios.

Soluciones

1. d	2. a	3. a	4. c	5. b

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. La demanda de mercado de un bien *X* está compuesta por dos grupos de consumidores donde el número de individuos por grupo y la función de demanda individual de cada uno de ellos son:

	Número de consumidores	Demanda individual
GRUPO 1	10	$P_X = 30 - X_1^i$
GRUPO 2	4	$P_X = 40 - \frac{4}{5}X_2^i$

Obtenga cuál debería ser, en cada caso, el precio de mercado de equilibrio para que la cantidad demandada agregada fuera de:

a) 40 unidades.

b) 275 unidades.

Solución

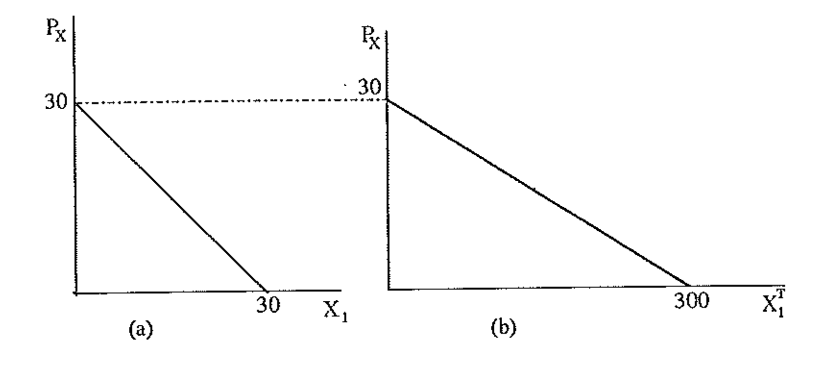
Comenzamos obteniendo la función de demanda para cada grupo de consumidores:

Grupo 1: Inicialmente obtendremos la representación gráfica de la función de demanda individual, donde los puntos de corte con los ejes son (30,0) y (0,30).

Para obtener la función de demanda conjunta sólo hay que sumar horizontalmente las 10 funciones de demanda individuales, o lo que aún es más sencillo, para obtener la cantidad demandada conjunta procederíamos a, para cada precio, multiplicar por 10 la cantidad demandada individual.

Gráficamente:

Grupo 1: Funciones de demanda individual (a) y conjunta (b)



Para derivar analíticamente la función de demanda agregada se realizan los siguientes pasos:

Dada la función de demanda individual se despeja la cantidad: $X_1^i = 30 - P_X$, y se suman las cantidades de los 10 individuos que componen el grupo, obteniéndose:

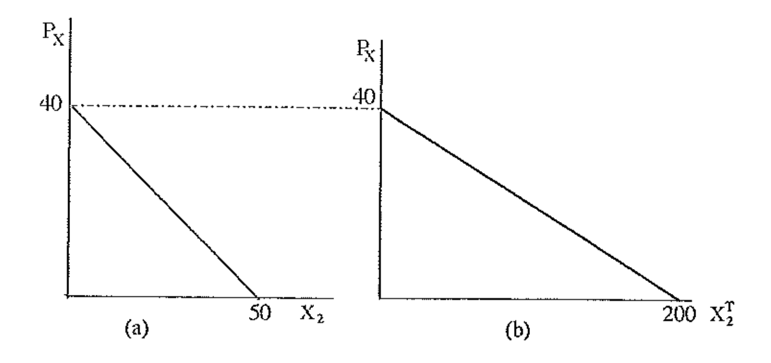
$$\sum_{i=1}^{10} X_1^i = \sum_{i=1}^{10} (30 - P_X),$$

de donde: $X_1^T = 300 - 10P_X$. Si despejamos ahora el precio tendríamos que la ecuación de demanda conjunta del grupo 1 sería:

$$P_X = 30 - \frac{X_1^T}{10}$$

Grupo 2: Se procedería de forma idéntica al caso anterior:

Grupo 2: Funciones de demanda individual (a) y conjunta (b)



Dada la función de demanda individual despejamos la cantidad:

$$X_2^i = 50 - \frac{5}{4}P_X,$$

de donde sumando sobre los 4 individuos que componen el grupo tendríamos:

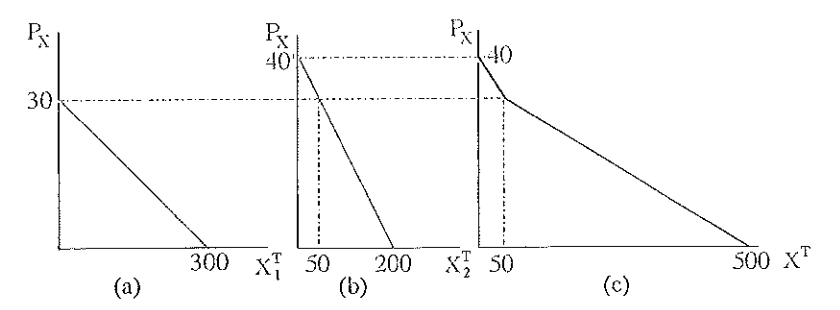
$$\sum_{i=1}^{4} X_2^i = \sum_{i=1}^{4} \left(50 - \frac{5}{4}P_X\right),$$

de donde: $X_2^T = 200 - 5P_X$. Si despejamos ahora el precio tendríamos que la ecuación de demanda conjunta del grupo 2 sería:

$$P_X = 40 - \frac{X_2^T}{5}$$

Finalmente, para obtener la función de demanda agregada sumaremos horizontalmente las funciones de demanda agregadas de cada grupo:

Funciones de demanda del grupo 1 (a), del grupo 2 (b) y conjunta (c)



Pasemos ahora a responder a las preguntas:

a) Como se deduce del gráfico anterior, para una cantidad de 40 sólo demanda el grupo 2, por tanto, bastará con sustituir $X = 40$ en la función de demanda para el grupo 2:

$$P_X = 40 - \frac{40}{5} = 40 - 8 = 32$$

b) Para una cantidad de 275 demandan tanto el grupo 1 como el 2. Por ello, pasamos a deducir la ecuación de la demanda para el segundo tramo que pasa por los puntos de coordenadas: (50,30) y (500,0). Dicha función es:

$$P_X = \frac{100}{3} - \frac{X}{15}$$

Si sustituimos en la anterior expresión $X = 275$ obtendríamos que el precio de equilibrio debería ser de 15.

2. Calcular el equilibrio del consumidor si su función de utilidad es $U = X(Y-4)$, el precio del bien X es 10, el del bien Y es 30 y la renta del individuo es 300 u.m.

Solución

El equilibrio del consumidor se encuentra en el punto donde la pendiente de la curva de indiferencia es igual a la pendiente de la restricción presupuestaria, por lo que debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{UMg_X}{UMg_Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Además, el punto óptimo debe verificar la restricción presupuestaria $R = P_X X + P_Y Y$.

Calculamos la $UMg_X = \frac{\partial U}{\partial X} = Y - 4$ y la $UMg_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = X$

Sustituyendo los datos del enunciado tenemos:

$$\frac{Y-4}{X} = \frac{10}{30} \qquad (1)$$

$$10X + 30Y = 300 \qquad (2)$$

Que nos proporciona un sistema de dos ecuaciones (1) y (2) con dos incógnitas cuya solución es el óptimo buscado. De la ecuación (2) tenemos:

$X = 30 - 3Y$

y de la (1) despejando X

$X = 3(Y - 4)$

Por igualación llegamos a:

$(3Y - 4) = 30 - 3Y$

de donde:

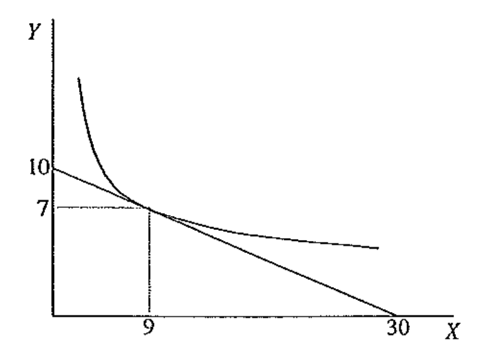
$3Y - 12 = 30 - 3Y$, es decir, $6Y = 42$

por lo que

$Y^* = 7$

$X^* = 3(7 - 4) = 9$

En términos gráficos:



3. En un mercado existen dos bienes X e Y que son sustitutivos perfectos para el consumidor. Partiendo de una situación inicial y dados los precios de los bienes y la renta del consumidor, el individuo se encuentra en el óptimo cuando se gasta toda su renta en el bien X y no consume nada del bien Y. Indique si las siguientes afirmaciones son correctas:

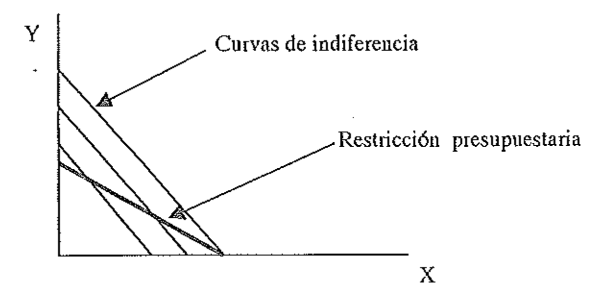
a) Partiendo de la situación inicial, si se produce una disminución de la renta del consumidor, el individuo cambia su consumo encontrándose en un óptimo cuando se gasta toda su renta en el bien Y.

b) Partiendo de la situación inicial, si disminuye el precio del bien X, el individuo continúa encontrándose en el óptimo al gastarse toda su renta en el bien X.

c) Partiendo de la situación inicial, si aumenta el precio del bien X, el individuo sigue manteniendo la elección de consumo encontrándose en un óptimo al gastarse toda su renta en el bien X.

Solución

Si en la situación inicial el consumidor se encuentra en un óptimo cuando se gasta toda su renta en el bien X, sabemos que la pendiente de las curvas de indiferencia (líneas rectas), en valor absoluto, es mayor que la pendiente de la restricción presupuestaria. Se producirá un cambio en la decisión de consumo cuando se invierta la relación entre ambas pendientes.



Por lo tanto,

a) La afirmación es **incorrecta**, puesto que una variación en la renta no cambia la pendiente de la restricción presupuestaria, sólo desplaza paralelamente dicha recta. El consumidor seguirá en un óptimo gastándose toda su renta en el bien X.

b) La afirmación es **correcta**, puesto que si disminuye el precio del bien X, la pendiente de la restricción presupuestaria, en valor absoluto, es menor. Se sigue manteniendo la relación entre las pendientes de la curva de indiferencia y la restricción presupuestaria, y el consumidor seguirá en el óptimo gastándose toda su renta en el bien X.

c) La afirmación es **incorrecta**, porque al aumentar el precio del bien X, la pendiente de la restricción presupuestaria, en valor absoluto, aumenta. Sólo si el aumento de dicha pendiente queda en un valor inferior a la pendiente de la curva de indiferencia seguiría estando en el óptimo gastándose toda su renta en el bien X. Podría ocurrir que ahora la pendiente de la restricción presupuestaria fuese en valor absoluto mayor que la de la curva de indiferencia, y en este caso, el óptimo para el consumidor sería gastarse toda su renta en el bien Y. También podría darse el caso que la pendiente de la restricción coincidiese con la de la curva de indiferencia, y cualquier punto de la restricción sería óptimo para el consumidor.

Problemas propuestos

1. Un joven dispone de 5.000 unidades monetarias (u.m.) para gastarse en un fin de semana. Sólo le gusta la cerveza y puede elegir entre una de fabricación nacional, que denotaremos por N y otra de importación que denotaremos por I. Es indiferente entre cualquiera de ellas -son sustitutivos perfectos para el individuo-.

a) Represente gráficamente las curvas de indiferencia y la restricción presupuestaria de este individuo si $P_N = 250$ y $P_I = 400$. ¿Cuánto elegirá consumir de cada una de ellas? (Eje de abscisas: N, eje de ordenadas: I).

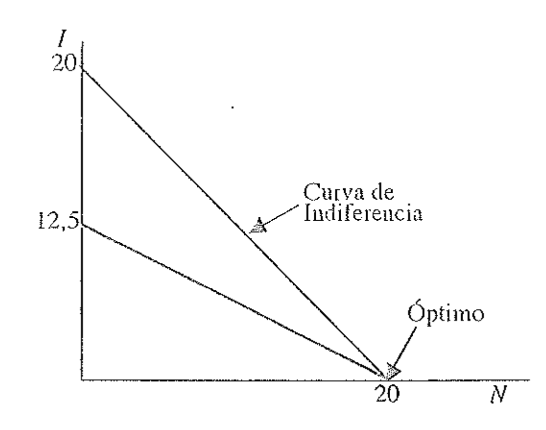
b) Suponga que descubre un bar nuevo donde $P_I = 200$. ¿Cuál es la nueva restricción presupuestaria? ¿Cuánto consume ahora?

Solución:

a) Las curvas de indiferencia serán líneas rectas paralelas con pendiente –1. La restricción presupuestaria del joven será: $5.000 = 250 \cdot N + 400 \cdot I$. La pendiente será:

$$-\frac{P_N}{P_I} = -\frac{250}{400} = -0{,}625$$

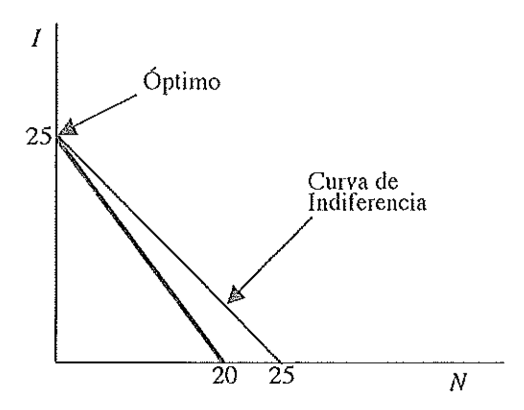
Por tanto, el joven que maximiza su utilidad, elegirá una solución esquina donde sólo consumirá N, la solución óptima será: (20,0).



Si consideramos ahora que $P_I = 200$. La nueva restricción será: $5.000 = 250 \cdot N + 200 \cdot I$, ecuación que cortará en los ejes en (0,25) y en (20,0), y tendrá de pendiente:

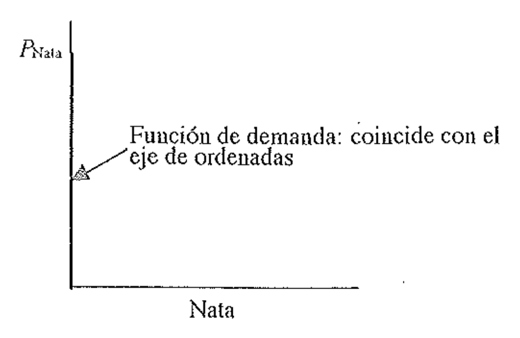
$$-\frac{P_N}{P_I} = -\frac{250}{200} = -1{,}25$$

por lo que ahora al tener la restricción presupuestaria una pendiente en valor absoluto mayor a la de las curvas de indiferencia tendremos una nueva solución óptima que será la solución esquina en el eje Y: (0,25).



2. En una economía existen dos únicos bienes: chocolate y nata. Juan es alérgico a los productos lácteos y considera la nata como un mal. María es indiferente a la nata. A ambos les encanta el chocolate. ¿Cómo es la curva de demanda de la nata para Juan? ¿Y para María?

Solución:



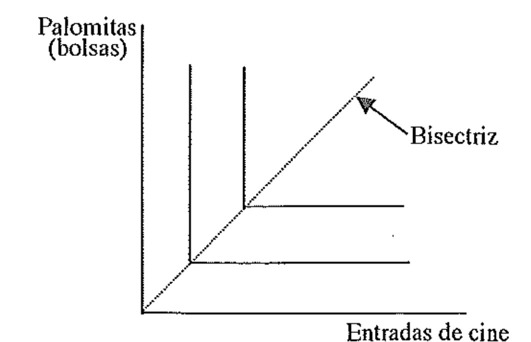
Función de demanda de nata para Juan

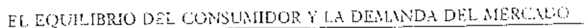
Para María la función de demanda será idéntica a la anterior.

3. Si un amigo le dice que cuando va al cine tiene que comprar siempre una bolsa de palomitas, ¿qué tipo de bienes son las entradas de cine (C) y las bolsas de palomitas (P), si sabe que no come palomitas en ningún otro sitio y que cuando va al cine no quiere más que una bolsa? Dibuje sus curvas de indiferencia.

Solución:

Las curvas de indiferencia serán las propias de bienes complementarios perfectos que se consumen en proporción 1 a 1, es decir, ángulos rectos cuyo vértice pasa por la bisectriz del 1^{er} cuadrante.





4. Si la función de utilidad de un individuo es $U = 2 \ln X + \ln Y$,

a) Obtenga la ecuación de demanda para el bien X y para el bien Y.

b) Si el precio del bien X es 6, el precio del bien Y es 8 y la renta es 72, obtenga la cesta de equilibrio para el consumidor.

Solución:

a) La función de demanda de X es $X = \dfrac{2R}{3Px}$

La función de demanda de Y es $Y = \dfrac{R}{3P_Y}$

b) La cesta de equilibrio es X=8 e Y=3

Capítulo 3
La teoría del comportamiento del consumidor

CONCEPTOS CLAVE

1. Variación de la renta del consumidor

Ante variaciones en la renta monetaria, el comportamiento del consumidor difiere según sea el tipo de bien que consume.

- Si el bien es **normal**, la variación en la renta provoca una variación en la cantidad consumida del mismo signo.
- Si el bien es **inferior**, la variación en la renta provoca una variación en la cantidad consumida de signo contrario.

La curva de Engel mide la relación entre la cantidad demandada del bien y la renta del consumidor cuando los precios se mantienen constantes.

La **elasticidad de la demanda respecto a la renta** mide la variación porcentual en la cantidad demandada respecto a una variación porcentual en la renta. La elasticidad arco de la demanda respecto a la renta es:

$$E_R = \frac{\Delta X}{\Delta R}\frac{R_0 + R_1}{X_0 + X_1}$$

2. Variaciones de los precios

El **efecto total** sobre la demanda de un bien ante una variación en el precio del mismo, puede descomponerse en dos efectos: el efecto sustitución y el efecto renta.

El **efecto sustitución según Slutsky** mide la respuesta del consumidor cuando cambia el precio relativo de un bien y el consumidor mantiene su poder adquisitivo.

El **efecto sustitución según Hicks** mide la respuesta del consumidor cuando cambia el precio relativo de un bien y el consumidor mantiene su nivel de utilidad.

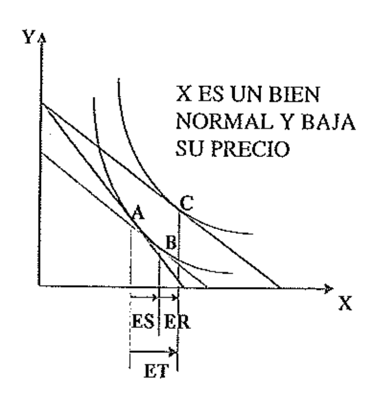
El **efecto renta** mide la respuesta del consumidor ante la variación de la renta real provocada por la variación en el precio.

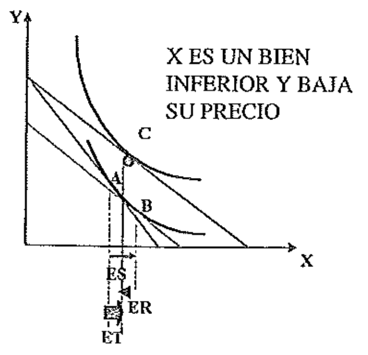
Un **bien Giffen** es un bien inferior cuyo efecto sustitución es menor que el efecto renta.

El siguiente cuadro resume los efectos sobre la cantidad consumida para los distintos tipos de bienes.

	BIEN NORMAL		BIEN INFERIOR NO GIFFEN		BIEN INFERIOR GIFFEN	
	↑P	↓P	↑P	↓P	↑P	↓P
ES	↓	↑	↓	↑	↓	↑
ER	↓	↑	↑	↓	↑	↓
ET	↓	↑	↓	↑	↑	↓

Algunos ejemplos gráficos del efecto sustitución y renta y las diferentes clases de bienes





La pendiente de la función de demanda se puede calcular mediante la **ecuación de Slutsky**:

$$\frac{\partial X}{\partial P} = \left.\frac{\partial X}{\partial P}\right|_{R=c} - X\left(\frac{\partial X}{\partial R}\right) \text{ según el criterio de Slutsky}$$

$$\frac{\partial X}{\partial P} = \left.\frac{\partial X}{\partial P}\right|_{U=c} - X\left(\frac{\partial X}{\partial R}\right) \text{ según el criterio de Hicks}$$

Esta ecuación afirma que la pendiente de la función de demanda es igual a la suma de los efectos renta y sustitución.

El **excedente del consumidor** es la diferencia entre la máxima cantidad que el consumidor está dispuesto a pagar y lo que realmente paga.

3. La incertidumbre y la toma de decisión

La **hipótesis de la renta esperada** afirma que el consumidor ante una situación de incertidumbre, elegirá aquella opción que le proporcione una mayor renta esperada.

$$RE = \sum p_i R_i$$

siendo p_i la probabilidad de que el resultado i ocurra y R_i la renta resultante si ocurre el resultado i.

La **hipótesis de la utilidad esperada** afirma que el consumidor, ante una situación de incertidumbre, elegirá la opción que le proporcione una mayor utilidad esperada.

$$UE = \sum p_i U(R_i)$$

siendo p_i la probabilidad de que el resultado i ocurra y $U(R_i)$ la utilidad de la renta resultante si ocurre el resultado i.

La curvatura de la función de utilidad esperada describe la actitud del consumidor ante el riesgo:

- si es cóncava, el individuo es **averso al riesgo**.
- si es convexa, el individuo es **amante del riesgo**.
- si es lineal, el individuo es **neutral al riesgo**.

TEST

1. Un individuo tiene una función de utilidad total de su renta: $UT = +\sqrt{R}$, donde R es la renta monetaria del individuo. En ese caso podemos afirmar que:

a) la utilidad total es una función creciente de la renta

b) la utilidad marginal de la renta es positiva y decreciente

c) el individuo es averso al riesgo

d) todas las opciones son correctas

2. Suponga que la demanda del bien X para un individuo es $P = 10 - 2X$. Si como consecuencia de una obligación estatal, finalmente el consumidor compra 4 unidades a un precio de 6. El excedente del consumidor será:

a) 0

b) 4

c) 8

d) -2

3. Partiendo de una situación de equilibrio, donde la cantidad y el precio de equilibrio son 20 y 100 respectivamente, al aumentar el precio en 10 unidades por el Efecto Sustitución la cantidad disminuiría en 3 unidades. Si la pendiente de la función de demanda indica que el precio aumenta en 10 unidades al disminuir la cantidad en 1 unidad,

a) el Efecto Renta será negativo indicando que se trata de un bien inferior

b) el Efecto Renta será positivo indicando que se trata de un bien normal

c) para que la pendiente de la función de demanda sea negativa, obligatoriamente el Efecto Renta debe ser positivo

d) el Efecto Renta siempre es negativo en una función de demanda decreciente

4. Si baja el precio de un bien normal, la cantidad demandada por el efecto renta:

a) estará a la derecha de la cantidad demandada por el efecto sustitución

b) estará a la izquierda de la cantidad de la demandada por el efecto sustitución

c) coincidirá con la cantidad demandada por el efecto sustitución

d) puede estar, tanto a la derecha como a la izquierda del efecto sustitución

5. Si X e Y son perfectamente complementarios y baja el precio del bien X:

a) por el efecto sustitución aumenta el consumo del bien X

b) por el efecto sustitución disminuye el consumo del bien X

c) el efecto sustitución es igual a 0

d) el efecto renta es igual a 0

6. Si un bien tiene elasticidad demanda-renta positiva, su elasticidad demanda-precio será:

a) negativa

b) positiva

c) podrá ser positiva o negativa

d) igual a 0.

Soluciones

1. d	2. a	3. a	4. a	5. c	6. a

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Con los datos del ejercicio resuelto 2 del capítulo 2 calcular el efecto renta y el efecto sustitución siguiendo el criterio de Hicks si el precio de X pasa a ser 40.

Solución

Del ejercicio 2 del capítulo 3 se tiene que si $P_X = 10$, $P_Y = 30$ y $R = 300$ la cesta de equilibrio es $X^* = 9$ e $Y^* = 7$.

Calculamos ahora el equilibrio con el nuevo precio de X. Utilizamos la condición de equilibrio del consumidor:

$$\frac{UMg_X}{UMg_Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Sabemos además que el punto de equilibrio debe verificar la restricción presupuestaria $R = P_X X + P_Y Y$.

Podemos sustituir los nuevos datos, con lo que se construye un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\frac{Y-4}{X}=\frac{40}{30} \qquad (1)$$

$$40X+30Y=300 \qquad (2)$$

despejando de (1) se tiene $4X = 3Y - 12$ y haciendo lo mismo de (2) se obtiene $4X = 30 - 3Y$. Por igualación se tiene $30 - 3Y = 3Y - 12$ y por tanto

$Y^* = 7$

y $X^* = \frac{3 \cdot 7 - 12}{4} = 2{,}25$

El EFECTO TOTAL sobre el bien X se calcula como la cantidad de equilibrio con $P_X = 40$, es decir 2,25, menos la cantidad de equilibrio con el precio inicial $P_X = 10$, es decir 9. Por tanto, el efecto total es 25,5 – 9 = 6,75.

Para calcular el EFECTO SUSTITUCIÓN según Hicks hay que calcular el nivel de utilidad, de la situación inicial, por lo que sustituimos la cesta de equilibrio inicial en la función de utilidad

$U = X(Y-4) = 9(7-4) = 27$

El efecto sustitución indica dónde estaría el consumidor si pudiera mantener el nivel de utilidad inicial con los nuevos precios, por lo que debe verificar por un lado, la condición de equilibrio

$$\frac{UMg_X}{UMg_Y}=\frac{P_X}{P_Y}$$

con los nuevos precios, es decir

$$\frac{Y-4}{X}=\frac{40}{30}$$

además de mantener el nivel de utilidad inicial, es decir, debe cumplir $X(Y-4) = 27$.

Tenemos de nuevo un sistema de ecuaciones

$$\frac{Y-4}{X}=\frac{40}{30} \qquad (1)$$

$$X(Y-4)=27 \qquad (2)$$

de donde despejando de (2) tenemos $X = \frac{27}{Y-4}$ que sustituimos en (1)

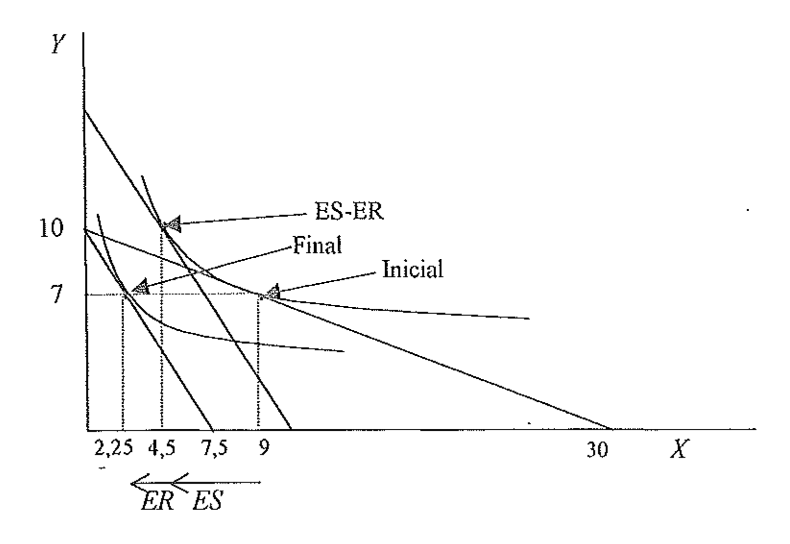
$$\frac{Y-4}{\frac{27}{Y-4}}=\frac{4}{3} \qquad (Y-4)^2=\frac{27\cdot 4}{3}=36 \qquad (Y-4)=6$$

por lo que $Y^* = 10$ y $X^* = \frac{27}{10-4} = 4{,}5$

de donde el EFECTO SUSTITUCIÓN es la cantidad demandada de X obtenida anteriormente, menos la de la situación inicial, es decir, 9 por lo que ES = 4,5 – 9 = – 4,5.

El EFECTO RENTA se calcula haciendo la diferencia entre la cantidad demandada de X con $P_X = 10$, es decir 2,25 menos la cantidad obtenida cuando se mantiene el nivel de utilidad ER = 2,25 – 4,5 = 2,25.

Gráficamente:



2. Con los datos del ejercicio resuelto nº 2 del capítulo 2 calcular el efecto renta y el efecto sustitución siguiendo el criterio de Slutsky si el precio de X pasa a ser 40.

Solución

El efecto total sería el mismo que el obtenido utilizando el criterio de Hicks. Por lo que la cesta de equilibrio con el nuevo precio de X es:

$Y^* = 10$ y $X^* = \frac{27}{10-4} = 4{,}5$

El EFECTO TOTAL sobre el bien X se calcula como la cantidad de equilibrio con $P_X = 40$, es decir 2,25, menos la cantidad de equilibrio con el precio inicial $P_X = 10$, es decir 9. Por tanto, el efecto total es $2{,}25 - 9 = -6{,}75$.

Para calcular el EFECTO SUSTITUCIÓN según Slutsky hay que calcular el nivel de renta necesario para adquirir la cesta inicial a los nuevos precios.

La cesta inicial era $X^* = 9$ e $Y^* = 7$, por lo que para poder adquirirla con los nuevos precios $P_X = 40$, $P_Y = 30$, se necesita una renta de:

$40 \cdot 9 + 30 \cdot 7 = 570$

Utilizando de nuevo la condición de equilibrio se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{Y-4}{X} = \frac{40}{30} \qquad (1)$$

$$40X + 30Y = 570 \qquad (2)$$

de donde despejando de (1) $4X = 3Y - 12$ y de (2) $4X = 57 - 3Y$.

Por igualación se tiene

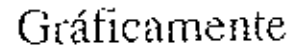
$57 - 3Y = 3Y - 12$

y, por tanto, $Y^* = 11{,}5$

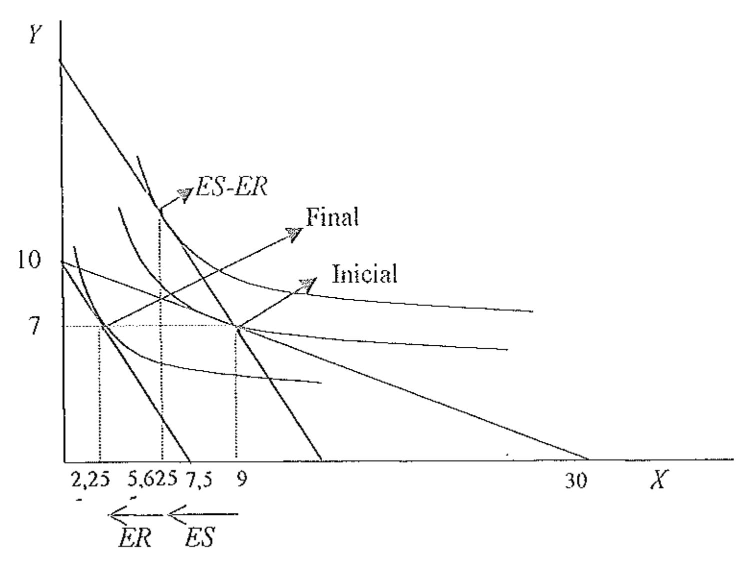
y $X^* = \frac{3 \cdot 11{,}5 - 12}{4} = 5{,}625$

por lo tanto, el EFECTO SUSTITUCIÓN se calcula como la cantidad consumida de X si se mantiene el nivel de renta, es decir, 5,625, menos la cantidad inicial, 9. ES = 5.625 – 9 = –3,375.

El EFECTO RENTA se calcula como la cantidad final consumida de X, 2,25 menos la obtenida manteniendo la renta. ER = 2,25 – 5,625 = –3,375 .



Gráficamente



3. Suponga que las preferencias de un individuo se representan mediante la siguiente función de utilidad: $U(X_1, X_2) = 100\sqrt{X_1 X_2}$. Si su renta monetaria es 500 unidades monetarias, calcule:

a) La cantidad que demandará en equilibrio si P_1=10 y P_2=5.

b) La cantidad que demandará en equilibrio si P_1 disminuyese a 5.

c) Calcule el Efecto Sustitución, Efecto Renta y Efecto Total, según el criterio de Hicks.

Solución

a) El punto óptimo para el consumidor se encuentra en el punto de tangencia entre la curva de indiferencia más alejada del origen y la restricción presupuestaria del consumidor. Se cumple que la pendiente de la restricción presupuestaria coincide con la pendiente de la curva de indiferencia:

$$\text{Pendiente de la curva de indiferencia} = \frac{UMgX_1}{UMgX_2}$$

$$\text{Pendiente de la restricción presupuestaria} = \frac{P_1}{P_2}$$

Calculamos en primer lugar las utilidades marginales:

$$UMgX_1 = \frac{\partial U(X_1, X_2)}{\partial X_1} = 100 \times \frac{1}{2}\frac{\sqrt{X_2}}{\sqrt{X_1}}$$

$$UMgX_2 = \frac{\partial U(X_1, X_2)}{\partial X_2} = 100 \times \frac{1}{2}\frac{\sqrt{X_1}}{\sqrt{X_2}}$$

Igualando las pendientes de la curva de indiferencia y la restricción presupuestaria encontramos la primera condición de óptimo:

$$\frac{UMgX_1}{UMgX_2} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow X_2 = 2X_1 \qquad (1)$$

Además, el óptimo debe cumplir la restricción presupuestaria:

$$R = P_1X_1 + P_2X_2 \Rightarrow 500 = 10X_1 + X_2 \qquad (2)$$

El punto óptimo cumple las dos condiciones, por lo que se tiene que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución indicará las cantidades óptimas demandadas por el consumidor. Sustituyendo (1) en (2), se obtiene:

$$500 = 10X_1 + 5(2X_1) = 20X_1 \Rightarrow X_1^* = 25$$

$$X_2^* = 2X_1 = 50$$

En el punto óptimo, el consumidor obtendrá de utilidad:

$$U(X_1^*, X_2^*) = 100\sqrt{25 \times 50} = 3535{,}53$$

b) Ante un cambio en el precio, varía la pendiente de la restricción presupuestaria y las condiciones (1) y (2) serán ahora:

$$\frac{UMgX_1}{UMgX_2} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow X_2 = X_1 \qquad (1')$$

$$R = P_1X_1 + P_2X_2 \Rightarrow 500 = 5X_1 + 5X_2 \qquad (2')$$

Resolviendo el sistema, se obtiene un nuevo punto óptimo que nos indica las nuevas cantidades demandadas:

$$500 = 5X_1 + 5(X_1) = 10X_1 \Rightarrow X_1 = 50$$

$$X_2 = X_1 = 50$$

c) En este apartado vamos a calcular el EFECTO SUSTITUCIÓN (ES), el EFECTO RENTA (ER) y el EFECTO TOTAL (ET). Utilizando los resultados de los apartados anteriores tenemos el punto inicial y final, por lo tanto, obtenemos cómo ha cambiado la cantidad demandada de X_1 cuando ha variado su precio:

$$ET = X_2 - X_1 = 50 - 25 = 25$$

Al disminuir el precio de X_1 la cantidad total demandada del bien ha aumentado, por lo tanto, es un bien que cumple la ley de la demanda (ordinario).

Para poder calcular el ES, se debe buscar el punto de tangencia entre la curva de indiferencia inicial y la paralela de la restricción presupuestaria final. La condición de tangencia será:

$$\frac{X_2}{X_1} = 1 \Rightarrow X_2 = X_1 \qquad (1'')$$

$$3535{,}53 = 100\sqrt{X_1 \cdot X_2} \qquad (2'')$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

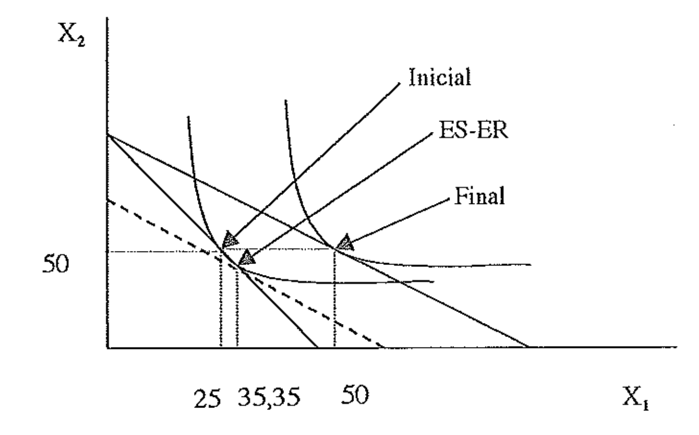
$X_1 = 35{,}35$
$X_2 = 35{,}35$
Podemos obtener cómo ha cambiado la cantidad demandada por el ES y el ER:

ES = 35,35 – 25 = 10,35

ER = 50 – 35.35 = 14,65

Comprobamos que al disminuir el precio ha aumentado la cantidad demandada por el ES, y en el ER obtenemos que también ha aumentado la cantidad, por lo tanto se trata de un bien normal.

Gráficamente:



4. Un individuo tiene una función de utilidad total de la renta que viene dada por: $U(R) = R^2$, y dispone de una renta segura inicial de 2 euros. Se pregunta:

a) ¿Qué tipo de individuo es: averso, neutral o amante al riesgo? ¿Cuál es su nivel de utilidad inicial?

b) Suponga ahora que el individuo puede invertir su renta en diferentes proyectos de inversión que pueden reportarle 3 euros (ganaría 1 euro) en el caso de ganar o bien reportarle 1 euro (perdería 1 euro) en el caso de perder. Se pregunta cuál sería la decisión del individuo en cada uno de los siguientes escenarios posibles en base tanto a la hipótesis de la renta esperada como de la utilidad esperada:

b.1) La probabilidad de ganar es de 0,6 y la de perder es de 0,4.

b.2) La probabilidad de ganar es de 0,36 y la de perder es de 0,64.

b.3) La probabilidad de ganar es de 0,38 y la de perder es de 0,62.

c) Calcular la probabilidad de ganar que haría indiferente al individuo entre invertir y no invertir, en términos de la renta esperada.

d) Finalmente se pide obtener cuál sería la probabilidad de ganar que haría indiferente al individuo entre invertir y no invertir, en términos de la utilidad esperada.

Solución

a) Para determinar de qué tipo de individuo se trata obtendremos la función de utilidad marginal de la renta a partir de la función de utilidad total, simplemente derivando dicha función:

$$UMg(R) = \frac{\partial UT(R)}{\partial R} = \frac{\partial R^2}{\partial R} = 2R$$

Se trata de una función de utilidad marginal que, para valores positivos de R, sólo toma valores positivos y que es creciente con R. Es decir, la UMg es positiva y creciente, por lo que se trata de un individuo amante del riesgo.

El nivel de utilidad inicial del individuo que denotaremos por US (utilidad segura) es:

$$US = UT(2) = 2^2 = 4$$

b) Para responder a esta pregunta tendremos que calcular la renta esperada de la inversión así como su utilidad esperada en cada uno de los tres escenarios y:

- Según la hipótesis de la RE, compararemos la renta esperada de la inversión con la renta si no invierte (que es 2).
- Según la hipótesis de la UE, compararemos la utilidad esperada de la inversión con la utilidad segura (que es 4).

b.1) En la primera situación la renta esperada del juego es:

$$RE = 0{,}6 \cdot 3 + 0{,}4 \cdot 1 = 1{,}8 + 0{,}4 = 2{,}2$$

Por lo que, en términos de la renta esperada, el individuo elegiría invertir ya que la renta esperada es mayor que la renta segura (2,2>2).

En términos de la hipótesis de la utilidad esperada compararíamos la utilidad de no invertir (que era de 4) con la utilidad en el caso de invertir en este escenario que es:

$$UE\,(\text{Invertir}) = 0{,}6 \cdot U(3) + 0{,}4 \cdot U(1) = 0{,}6 \cdot 3^2 + 0{,}4 \cdot 1^2 = 0{,}6 \cdot 9 + 0{,}4 = 5{,}8$$

Si comparamos la utilidad esperada con la utilidad segura el individuo que maximiza la utilidad esperada elegiría invertir.

b.2) En el segundo caso la renta esperada del juego es:

$$RE = 0{,}36 \cdot 3 + 0{,}64 \cdot 1 = 1{,}08 + 0{,}64 = 1{,}72$$

Por lo que, en términos de la renta esperada, el individuo elegiría no invertir ya que la renta segura (2) es mayor que la renta esperada (1,72).

En términos de la hipótesis de la utilidad esperada:

$$UE\,(\text{Invertir}) = 0{,}36 \cdot U(3) + 0{,}64 \cdot U(1) = 0{,}36 \cdot 3^2 + 0{,}64 \cdot 1^2 = 0{,}36 \cdot 9 + 0{,}64 = 3{,}88$$

Si comparamos la utilidad esperada con la utilidad segura el individuo, que maximiza la utilidad esperada, elegiría no invertir, puesto que si no invierte sus 2 euros se quedaría con una utilidad segura de 4 mientras que al invertir su utilidad esperada sería de 3,88.

b.3) En la tercera situación la renta esperada del juego es:

$$RE = 0{,}38 \cdot 3 + 0{,}62 \cdot 1 = 1{,}14 + 0{,}62 = 1{,}76$$

Ahora, en términos de la renta esperada, el individuo elegiría no invertir ya que la renta esperada es menor que la renta segura (1,76<2).

En términos de la hipótesis de la utilidad esperada:

$$UE\,(\text{Invertir}) = 0{,}38 \cdot U(3) + 0{,}62 \cdot U(1) = 0{,}38 \cdot 3^2 + 0{,}62 \cdot 1^2 = 0{,}38 \cdot 9 + 0{,}62 = 4{,}04$$

Si comparamos la utilidad esperada con la utilidad segura, el individuo que maximiza la utilidad esperada elegiría invertir.

Resumiendo los tres resultados obtenidos:

	RE	UE
b.1)	Invierte	Invierte
b.2)	No invierte	No invierte
b.3)	No invierte	Invierte

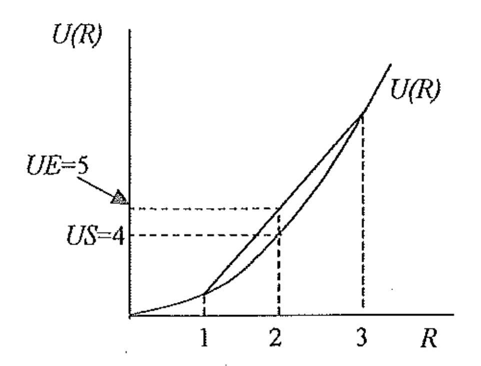
En este último caso las hipótesis de la renta esperada y la utilidad esperada nos dan resultados diferentes, no así en los dos primeros casos. La razón de este resultado *aparentemente* contradictorio nos la dará la respuesta a los dos últimos apartados.

c) Si llamamos x a la probabilidad de ganar y $1 - x$ a la probabilidad de perder, e igualamos la renta esperada a la renta segura, que era 2:

$RE = x \cdot 3 + (1 - x) \cdot 1 = 2 \rightarrow 3x + 1 - x = 2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = 0{,}5$. La probabilidad que las hace iguales es 0,5.

En este caso la utilidad de la inversión sería: $UE = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 9 = 0{,}5 + 4{,}5 = 5$.

Gráficamente:



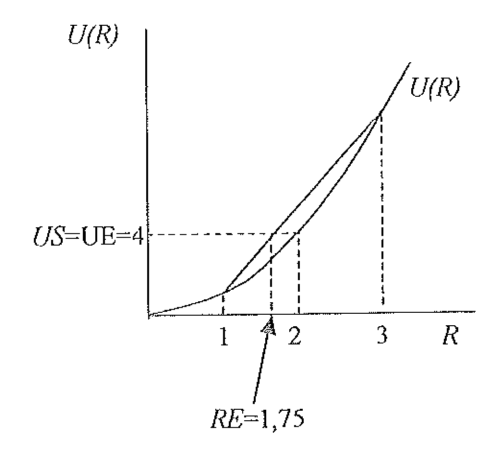
Este resultado se puede interpretar de la siguiente forma:

- si la probabilidad de ganar fuera mayor que 0,5 la renta esperada sería mayor que 2 y, por tanto, el individuo elegiría, en términos de ésta, invertir (caso b.1).
- si la probabilidad de ganar fuera menor que 0,5 la renta esperada sería menor que 2 por lo que no invertiría (casos b.2 y b.3).

d) Sea x la probabilidad de ganar y $1 - x$ la probabilidad de perder e igualamos la utilidad esperada a la utilidad segura, que era 4:

$$UE = x \cdot U(3) + (1 - x) \cdot U(1) = x \cdot 9 + (1 - x) \cdot 1 = 4 \rightarrow 9x + 1 - x = 4 \rightarrow 8x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Si la probabilidad de ganar fuera 0,375 (siendo la de perder 0,625), la renta esperada de la inversión sería: $RE = 0{,}375 \cdot 3 + 0{,}625 \cdot 1 = 1{,}125 + 0{,}625 = 1{,}75$. Gráficamente:



Podemos interpretar este resultado de la siguiente forma:

- si la probabilidad de ganar es mayor que 0,375 la hipótesis de la utilidad esperada nos diría que elige invertir puesto que la utilidad en este caso sale mayor que la utilidad segura (caso b.1 y b.3).
- si la probabilidad de ganar es menor que 0,375 la hipótesis de la utilidad esperada nos diría que no se invierte (caso b.2).

Si unimos los resultados obtenidos en estos dos últimos apartados podríamos decir que pueden darse tres posibles situaciones:

1. que la probabilidad de ganar sea mayor que 0,5, en este caso, tanto la hipótesis de la *RE* como la de la *UE,* indica que el individuo elige invertir (caso b.1).
2. que la probabilidad de ganar pertenezca al intervalo (0,375, 0,5), en este caso la hipótesis de la *RE* nos dice que el individuo elige no invertir mientras que la hipótesis de la *UE* nos dice que elige invertir (caso b.3).
3. que la probabilidad de ganar sea inferir a 0,375, en ese caso tanto la hipótesis de la *RE* como la de la *UE* nos dice que elige no invertir (caso b.2).

5. Un consumidor posee una riqueza de 100 euros que puede colocar en dos posibles inversiones. La inversión A, con probabilidad 0,25 le dejaría con 40 euros y con probabilidad 0,75 alcanzaría 120 euros. La inversión B, con probabilidad 0,1 se queda con 40 euros y con probabilidad 0,9 alcanza los 120 euros.

a) Según la hipótesis de la renta esperada, indique si el individuo decide invertir y si es así en cuál de las dos situaciones.

b) Conociendo la utilidad que le proporciona al individuo distintos niveles de riqueza, según los valores de la tabla, indique según la hipótesis de la utilidad esperada si el individuo decide invertir y si es así en cuál de las dos situaciones.

Renta	40	60	100	110	120
Utilidad	80	90	97	98	100

Solución

a) Según la hipótesis de la renta esperada, el individuo elige la opción que le proporciona una renta esperada mayor. Calculamos la renta esperada:

$RE(A) = 0{,}25 \cdot 40 + 0{,}75 \cdot 120 = 100$

$RE(B) = 0{,}1 \cdot 40 + 0{,}9 \cdot 120 = 112$

En este caso, la opción B le proporciona una mayor renta esperada y también es mayor que la riqueza de la que ahora dispone. Elige la opción B.

b) Partiendo de los valores de la tabla, calculamos la utilidad esperada de ambas opciones:

$UE(A) = 0{,}25 \cdot 80 + 0{,}75 \cdot 100 = 95$

$UE(B) = 0{,}1 \cdot 80 + 0{,}9 \cdot 100 = 98$

Comparando ambas alternativas, la opción B proporciona una mayor utilidad. La utilidad de la renta segura U(100)=97, que es inferior a la de la opción B, por lo que el individuo elegirá según la hipótesis de la utilidad esperada también la opción B.

Ejercicios propuestos

1. Con los datos del problema propuesto nº 4 del capítulo 2 si el precio de X pasa a ser 3, obtenga el efecto sustitución, el efecto renta y el efecto total.

Solución:

La cesta de equilibrio a los nuevos precios es (16,3).

Hicks

ES: $10{,}08 - 8 = 2{,}08$

ER: $16 - 10{,}08 = 5{,}92$

ET: $16 - 8 = 8$

Slutsky

ES: $10{,}67 - 8 = 2{,}67$

ER: $16 - 10{,}67 = 5{,}33$

ET: $16 - 8 = 8$

2. La función de utilidad de la renta de un consumidor es $U(R) = 10\sqrt{R}$. El individuo dispone de una renta de 100 euros y se plantea invertirlo. Las opciones de inversión son las siguientes:

Opción A: con probabilidad 0,25 el individuo obtiene una renta adicional de 30 euros y con probabilidad 0,75, pierde 10 euros.

Opción B: con probabilidad 0,4 el individuo obtiene una renta adicional de 10 euros y con probabilidad 0,6, pierde 20 euros.

Señale cuál es la mejor opción de inversión para el individuo utilizando tanto la hipótesis de la renta esperada como la de la utilidad esperada.

Solución

Según la hipótesis de la renta esperada, el individuo es indiferente entre invertir en la opción A, cuya renta esperada es 100 euros, que no invertir. Lo que no haría sería invertir en la opción B, cuya renta esperada es 92 euros, menor que si decide no invertir.

Según la hipótesis de la utilidad esperada, el individuo es casi indiferente entre invertir en la opción A, cuya utilidad esperada es $99{,}65 \cong 100$ euros, que no invertir. Lo que no haría sería invertir en la opción B, cuya utilidad esperada es 95,62 euros, menor que si decide no invertir. La utilidad de la renta segura es 100 euros.

Capítulo 4
El factor tiempo y el equilibrio del consumidor

CONCEPTOS CLAVE

En este capítulo se incluye en el coste para el individuo de consumir un bien, tanto su precio como el coste del tiempo necesario para consumirlo y se estudia la decisión óptima por parte del consumidor en dos situaciones donde:

1ª.- el tiempo necesario para consumir un bien es constante para el individuo.

2ª.- el tiempo necesario para consumir un bien es función del precio del mismo.

En la primera situación el consumidor dispone de un tiempo total (T) que puede dedicar a trabajar o a consumir. El tiempo de trabajo se le paga a un salario w y el tiempo para consumir lo puede repartir entre dos bienes X e Y, cada uno de los cuales necesita un tiempo para ser consumidos (t_X y t_Y, respectivamente).

A partir de la restricción presupuestaria temporal del individuo (expresada en unidades de tiempo homogéneas) y de la restricción presupuestaria (donde se incluye la posibilidad de que el individuo reciba rentas no salariales, que denotamos por V) se obtiene la **restricción presupuestaria con precios totales:**

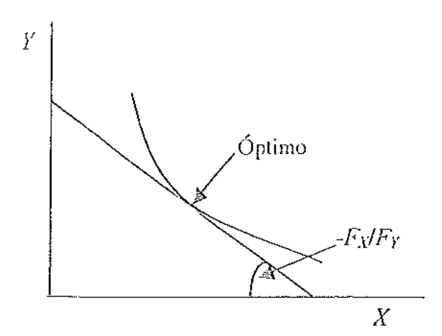
$$(P_X + wt_X)X + (P_Y + wt_Y)Y = wT + V$$

Cuya pendiente es:

$$-\frac{\text{Precio total de } X}{\text{Precio total de } Y} = -\frac{F_X}{F_Y} = -\frac{P_X + wt_X}{P_Y + wt_Y}$$

Dada la función de utilidad del consumidor, la cesta de mercado óptima será, gráficamente, aquella cesta donde una curva de indiferencia sea tangente a la restricción presupuestaria con precios totales:

$$RMS_X^Y = -\frac{F_X}{F_Y}$$



Un aspecto importante es el efecto sobre la restricción presupuestaria con precios totales de una variación en el salario en ausencia de rentas no salariales. En este caso se puede demostrar que un aumento del salario aumentará los puntos de corte con los ejes de la restricción presupuestaria. En relación al efecto sobre la pendiente, éste depende de lo **tiempo-intensivos** que sean los bienes :

- si el bien X es menos tiempo-intensivo que el bien Y la restricción se hará más plana.
- si el bien X es más tiempo-intensivo que el bien Y la restricción se hará más vertical.
- si ambos son igual de tiempo-intensivos la pendiente no variará.

El grado de tiempo-intensidad de un bien viene reflejado por el número de unidades de tiempo necesarias para consumir una unidad monetaria de un bien, es decir, por el cociente entre tiempo (t) y precio (P) para cada bien:

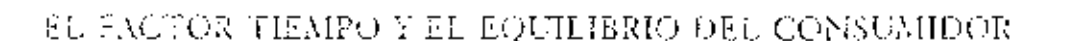
$\frac{t_X}{P_X}$, para el caso del bien X.

En la segunda situación se plantea la elección óptima en un entorno distinto. Ahora el tiempo necesario para consumir un bien está en relación con el precio que éste tiene y además se supone una relación inversa entre ambos. En concreto, se supone que esa relación puede expresarse a través de una función con pendiente negativa, por ejemplo, para el bien X: $t_X = f(P_X)$, $f'(P_X) < 0$. La elección óptima consiste en minimizar el precio total:

$$\min_{P_X} P_X + wt_X = P_X + wf(P_X)$$

de donde se obtiene que el precio mínimo al que se puede adquirir el bien X viene dado por la expresión:

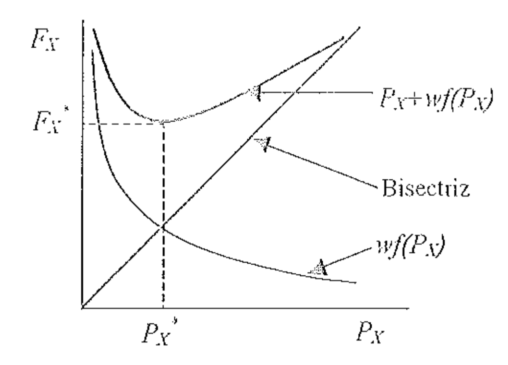
$$1 = -w\frac{\partial f(P_X)}{\partial P_X}$$



Una vez obtenido el precio mínimo P^*_X, para obtener el precio total mínimo se sustituiría P^*_X en la expresión del precio total:

$$\text{Precio total mínimo} = F^*_X = P^*_X + wf(P^*_X)$$

Gráficamente:



TEST

1. Un consumidor puede elegir entre una gama continua de combinaciones precio-tiempo para el bien X dada por:

$$t_x = \frac{5}{P_x} + 2$$

¿Cuál será el precio total mínimo si el salario es de 5 u.m.?:

a) 5 u.m.

b) 20 u.m.

c) 15 u.m.

d) 10 u.m.

2. Un individuo puede elegir entre consumir X e Y cuyos precios de mercado son 4 y 2. El tiempo que tarda en consumir cada bien son 2 y 4 horas respectivamente. El salario de dicho individuo es 100 unidades monetarias por hora. Se encuentra en una situación donde la UMg_X=10 y la UMg_Y=20. Señale la respuesta correcta:

a) El individuo no se encuentra en un óptimo. Para llegar al óptimo debería disminuir su consumo del bien X a cambio de aumentar el bien Y.

b) El individuo no se encuentra en un óptimo. Para llegar al óptimo debería aumentar su consumo del bien X a cambio de disminuir el bien Y.

c) El individuo se encuentra en el óptimo porque el cociente de precios coincide con el cociente de utilidades marginales.

d) Ninguna respuesta es correcta.

3. Si el precio total de *X* y el de *Y* se duplican:

a) La pendiente de la restricción presupuestaria no cambia.

b) La ordenada en el origen de la restricción presupuestaria aumenta.

c) No hay desplazamiento de la restricción presupuestaria.

d) Todas las respuestas son correctas.

4. En el modelo del consumidor estudiado, un aumento en su salario en ausencia de rentas no salariales:

a) Disminuir la ordenada en el origen de su restricción presupuestaria con precios totales.

b) Disminuirá el punto de corte con el eje *X* el de su restricción presupuestaria con precios totales.

c) Hará más plana la restricción presupuestaria con precios totales si el bien *X* es menos tiempo intensivo que el bien *Y*.

d) No variará la pendiente si el bien *Y* es el doble de tiempo intensivo que el *X*.

5. El cociente $\frac{t_X}{P_X}$ para el bien *X* refleja:

a) El tiempo consumido por unidad monetaria gastada en el bien *X*.

b) El tiempo necesario para consumir una unidad física del bien *X*.

c) El coste de oportunidad del tiempo necesario para consumir una unidad física del bien *X*.

d) La pendiente de la restricción presupuestaria con precios totales.

Soluciones

1. b	**2.** a	**3.** a	**4.** c	**5.** a

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Suponga que un consumidor puede elegir entre una gama continua de combinaciones precio-tiempo dada por la ecuación

$$t_x = \frac{4}{P_x} + 2$$

Si el salario es $w = 16$, calcular el precio total mínimo. Si el salario pasa a ser $w = 9$ indique cuál sería el nuevo precio total mínimo.

Solución

$$F_x = P_x + wt_x = P_x + 16\left(\frac{4}{P_x} + 2\right)$$

El mínimo debe cumplir

$$\frac{dF_x}{dP_x} = 1 - \frac{16 \cdot 4}{P_x^2} = 0$$

de donde

$$1 = \frac{64}{P_x^2} \qquad P_x^{'} = \sqrt{64} = 8 \text{ y } F_x^{'} = 8 + 16 \cdot \left(\frac{4}{8} + 2\right) = 48$$

Si el salario pasa a ser 9

$$F_x = P_x + wt_x = P_x + 9\left(\frac{4}{P_x} + 2\right)$$

$$\frac{dF_x}{dP_x} = 1 - \frac{9 \times 4}{P_x^2} = 0$$

$$P_x^{*} = \sqrt{36} = 6 \text{ y } F_x^{*} = 6 + 9\left(\frac{4}{6} + 2\right) = 30$$

2. Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando razonadamente su respuesta:

a) Un individuo puede elegir consumir 2 bienes *X* e *Y*, cuyos precios unitarios de mercado son: $P_X = 7$ u.m. y $P_Y = 10$ u.m. El tiempo de consumo por uni-

dad del bien X es de tres horas y el del bien Y es de dos horas. El salario de mercado es de 3 u.m. a la hora. Si el consumidor se encuentra en un punto sobre su restricción presupuestaria donde pasa una curva de indiferencia cuya $RMS = -1$, podremos decir que está maximizando su utilidad.

b) Suponga que en el mercado se dispone de dos bienes X e Y cuyos precios de mercado son respectivamente 3 y 4 u.m. El tiempo de consumo del bien X es de 2 horas mientras que el del bien Y es de 1 hora. Si el salario de mercado fuese de 2 u.m. a la hora, para cualquier individuo, Y será más caro que X.

Solución

a) VERDADERO. Si calculamos los precios totales de ambos bienes tenemos que:

$$F_X = P_X + wt_X = 7 + 3 \cdot 3 = 16$$

$$F_y = P_y + wt_y = 10 + 3 \cdot 2 = 16$$

Por tanto, la pendiente de la restricción presupuestaria con precios totales es:

$$-\frac{F_X}{F_Y} = -\frac{16}{16} = -1$$

Puesto que el individuo se encuentra sobre la restricción presupuestaria y, además, la pendiente de la curva de indiferencia en ese punto (RMS) coincide con la restricción presupuestaria (hay tangencia entre la curva de indiferencia y la restricción presupuestaria) podemos decir que está maximizando su utilidad.

b) FALSO. Para comprobar cuál de los dos bienes es más caro, calcularemos los precios totales de cada uno de ellos:

$$F_X = P_X + wt_X = 3 + 2 \cdot 2 = 7$$

$$F_y = P_y + wt_y = 4 + 2 \cdot 1 = 6$$

Con estos resultados comprobamos que el bien X es más caro en términos totales que el bien Y.

3. Un individuo puede elegir consumir X e Y cuyos precios de mercado son 4 y 2 respectivamente. El tiempo que tarda en consumir cada uno de los bienes es de 2 y 4 horas. Si el salario de dicho individuo es 100 u.m./hora.

a) Calcule y dibuje la restricción presupuestaria con precios totales, suponiendo que no existen rentas no salariales.

b) Si el individuo se encuentra en una situación donde la $UMg_x=10$ y la $UMg_y=200$, ¿se encuentra en el óptimo? Si no es así, indique cómo podría llegar a alcanzar su máxima utilidad.

c) Si el tiempo que tarda en consumir X no fuese constante y pudiese elegir entre una gama continua de combinaciones precio-tiempo dado por la ecuación: $t_x=1/P_x$ ¿cuál sería el precio total mínimo que tendría que pagar el individuo?

Solución

a) La restricción presupuestaria con precios totales se calcula como:

$$wT + V = F_X X + F_Y Y$$

$$F_X = P_X + wt_X = 4 + 100 \times 2 = 204$$

$$F_y = P_y + wt_y = 2 + 100 \times 4 = 402$$

Puesto que no existen rentas no salariales V=0, la restricción quedará:

$$2400 = 204X + 402Y$$

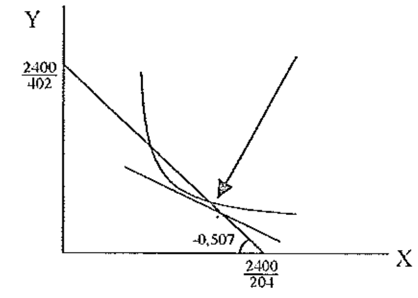
La pendiente de la restricción presupuestaria con precios totales es:

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{204}{402} = 0{,}507$$

b) Para que el individuo se encuentre en un óptimo se debe cumplir que:

$$\frac{UMgX}{UMgY} = \frac{F_x}{F_Y} \Rightarrow \frac{10}{200} = 0{,}05 \neq 0{,}507$$

Podemos decir que no se encuentra en el óptimo. En este caso, la pendiente de la curva de indiferencia es menor que la pendiente de la restricción presupuestaria, por lo que se llegaría al óptimo si el consumidor disminuyese la cantidad consumida de X y aumentase la cantidad consumida de Y.



c) Si el tiempo no es constante, el precio total:

$$F_x = P_x + wt_x = P_x + 100\frac{1}{P_x}$$

Para calcular el precio total mínimo, derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{\partial F_x}{\partial P_x} = 1 - 100\frac{1}{P_x^2} = 0 \Rightarrow P_x^2 = 100 \Rightarrow P_x^* = 10$$

y el precio total mínimo será $F_x^* = 20$.

Problemas propuestos

1. Suponga que el precio unitario del bien X es 3 u.m. y el precio unitario del bien Y es de 2 u.m. Si consumir cada unidad del bien X lleva 2 horas y consumir cada unidad del bien Y lleva 3 horas. Razone cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

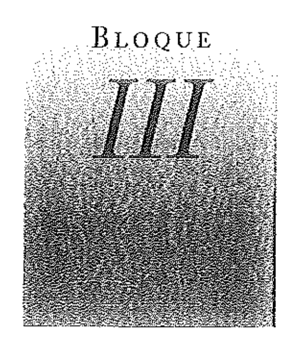
a) Si el salario es de 2 u.m. /hora el bien X es más caro que el Y.

b) Si el salario es de 1 u.m./hora la pendiente de la restricción presupuestaria con precios totales vale –1.

d) Si el salario es de 0,5 u.m./hora, el bien X es más caro que el bien Y.

Solución:

a) Falso. b) Verdadero. c) Verdadero.



Teoría de la producción

Capítulo 5: La función de producción y los costes de la empresa • Capítulo 6: Las funciones de costes de la empresa • Capítulo 7: Las funciones de oferta de una empresa competitiva • Capítulo 8: La determinación del precio en una industria competitiva • Capítulo 9: La fijación de precios en el monopolio y la discriminación de precios • Capítulo 10: La fijación de precios en el oligopolio

Capítulo 5
La función de producción y los costes de la empresa

CONCEPTOS CLAVE

Para describir la tecnología de una empresa productiva se utiliza la **función de producción** que muestra la cantidad producida mediante las diferentes combinaciones de factores productivos para un estado de la tecnología determinado. La función de producción puede expresarse como una tabla, una gráfica o una función matemática. Asimismo, el **estado de la tecnología** se define como el conjunto de los conocimientos disponibles en relación con los métodos de producción. Matemáticamente la función de producción puede escribirse como:

$$q = f\,(\textit{factores productivos}) = f(L, K, \ldots)$$

Si al menos uno de los factores productivos es fijo, se habla de **corto plazo**. Por el contrario, si todos los factores son variables se habla de **largo plazo**.

A partir de la función de producción a corto plazo, y particularizando para dos factores de producción, se pueden definir los siguientes conceptos:

La **Productividad o producto total** muestra la cantidad producida con cada cantidad de factor variable para un valor dado del otro factor (factor fijo).

La **Productividad media de un factor de producción**, ($PMe(q)$), mide el volumen de producción por cada unidad del factor productivo.

La **Productividad marginal de un factor** ($PMg(q)$) es la variación que se produce en la productividad total cuando varía el factor productivo.

Para estudiar cómo la empresa puede sustituir factores de producción se utiliza la **isocuanta** que es el conjunto de puntos que muestran las diferentes combinaciones de factores productivos que permiten alcanzar el mismo nivel de producción. La **relación marginal de sustitución técnica** se define como la tasa a la que se sustituye un factor productivo por otro, a lo largo de la curva isocuanta. Geométricamente, es la pendiente en un punto de la curva isocuanta.

Para medir la variación en la producción cuando se incrementan todos los factores productivos en una cantidad constante se utilizan los **rendimientos a escala**. En este sentido, se dice que la función de producción presenta:

- **Rendimientos crecientes** a escala cuando al aumentar todos los factores productivos en una misma proporción (por ejemplo, se multiplican por dos) la producción aumenta en más de esa proporción (más del doble).
- **Rendimientos constantes** a escala cuando al aumentar todos los factores productivos en una misma proporción (por ejemplo, se multiplican por dos) la producción aumenta en esa proporción (el doble).
- **Rendimientos decrecientes** a escala cuando al aumentar todos los factores productivos en una misma proporción (por ejemplo, se multiplican por dos) la producción aumenta en menos de esa proporción (menos del doble).

Los costes en los que incurre una empresa cuando compra una combinación de factores productivos L y K, es:

$CT = wL + rK$

donde CT es el coste total, w es el precio del factor trabajo y r es el precio del factor capital. La **función isocoste** muestra las combinaciones de factores productivos que para unos precios dados de éstos permiten alcanzar el mismo nivel de coste.

Para encontrar la combinación de factores que produce una cantidad dada al mínimo coste total se debe resolver el problema:

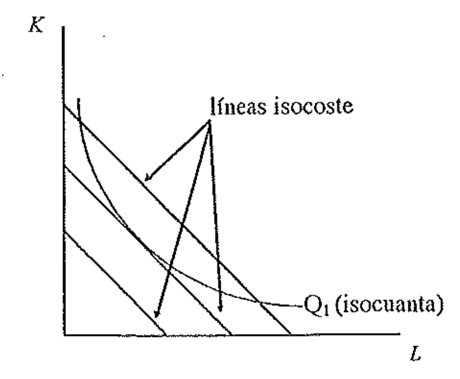
$MinC = wL + rK$ sujeto a $q = f(L,K)$

de donde se obtiene que la condición de coste mínimo implica

$$RMST_L^K = -\frac{w}{r}$$

es decir, la pendiente de la isocuanta debe ser igual a la pendiente de la isocoste.

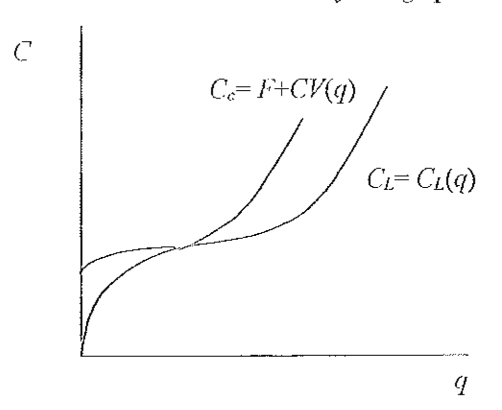
Isocoste e Isocuanta



La **función de coste total a largo plazo**, muestra el mínimo coste total de producción para cada cantidad cuando todos los factores son variables.

La **función de coste total a corto plazo** muestra el mínimo coste total de producir cada cantidad cuando un factor es fijo.

Función de coste total a corto y largo plazo



TEST

1. La relación marginal de sustitución técnica establece:

a) cómo puede una empresa sustituir factor capital por factor trabajo manteniendo constante el volumen de producción.

b) cómo puede una empresa sustituir factor capital por factor trabajo e incrementar el volumen de producción.

c) cómo puede una empresa aumentar su producción incrementando la cantidad de factor trabajo y la cantidad de factor capital.

d) cómo puede una empresa incrementar su producción aumentando la cantidad de factor trabajo, manteniendo constante la cantidad de factor capital.

2. Si, actualmente, la empresa está contratando capital y trabajo de forma que $RMST_L^K = -w/r$, y el precio del capital, r, disminuye; para seguir produciendo en la misma isocuanta, es decir, para producir la misma cantidad:

a) La empresa debería contratar más capital y menos trabajo con lo que aumentará la $RMST_L^K$ en valor absoluto.

b) La empresa debería contratar más capital y menos trabajo con lo que disminuirá la $RMST_L^K$ en valor absoluto.

c) La empresa debería contratar menos capital y más trabajo con lo que aumentará la $RMST_L^K$ en valor absoluto.

d) La empresa debería contratar menos capital y más trabajo con lo que disminuirá la $RMST_L^K$ en valor absoluto.

3. Si el precio del factor trabajo es de 5 u.m. por unidad y el precio del factor capital es de 10 u.m. por unidad:

a) La empresa minimizará costes si la $RMST_L^K = -5$.

b) La empresa minimizará costes si la $PMg_K = 4$ y la $PMg_L = 2$.

c) La empresa minimizará costes si la $PMg_K = 8$ y la $PMg_L = 2$.

d) La empresa minimizará costes si la $RMST_L^K = 5$.

4. Si una empresa disminuye la utilización de todos los factores productivos en un k% y su producción desciende

a) Menos del k%, entonces la empresa tiene rendimientos crecientes a escala.

b) Más del k%, entonces la empresa tiene rendimientos crecientes a escala.

c) Más del k%, entonces la empresa tiene rendimientos decrecientes a escala.

d) Exactamente el k%, entonces la empresa tiene rendimientos decrecientes a escala.

5. Considérese una función de producción a corto plazo donde los únicos factores productivos son capital (K; factor fijo) y trabajo (L). En relación con las productividades media (PMe_L) y marginal (PMg_L) del trabajo se puede decir:

a) Cuando la PMe_L crece, la PMg_L se encuentra por encima.

b) La PMg_L alcanza el máximo a la izquierda de la PMe_L.

c) La PMe_L y la PMg_L son iguales en el punto en el que la PMe_L alcanza su máximo.

d) Todas las respuestas son correctas.

6. La función de producción $q = K^\alpha L^\beta$:

a) Presenta rendimientos constantes a escala si $\alpha + \beta = 1$.

b) Presenta rendimientos constantes a escala si $\alpha - \beta = 1$.

c) Presenta rendimientos crecientes a escala si $\alpha + \beta = 1$.

d) Ninguna de las anteriores.

Soluciones

1. a	2. a	3. b	4. a	5. d	6. a

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Suponga que existe una empresa competitiva que tiene una función de producción $q = f(L,K) = L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$, donde q mide el nivel de producción, K el nivel del factor de producción capital y L el nivel del factor de producción trabajo. Si los precios de los factores productivos vienen dados por $w = 2$, $r = 1$, se pide:

a) Obtener la combinación óptima de trabajo y capital que permite alcanzar un nivel de producción de 1 unidad.

b) Calcular el coste total mínimo en el que incurre la empresa por producir 1 unidad.

c) Suponga ahora que esta empresa descubre una innovación tecnológica por la cual su nueva función de producción pasa a ser: $q = f(L,K) = L^{\frac{1}{4}}K$. Determine la nueva combinación óptima de trabajo y capital que, para los precios dados de los factores productivos, permite alcanzar un nivel de producción de 1 unidad, así como el coste total mínimo en el que incurre ahora la empresa.

d) Calcular el volumen óptimo de producción que alcanzaría la empresa si, para los precios dados de los factores productivos y con la nueva función de producción, decide incurrir en el coste total del apartado b).

e) Represente gráficamente los apartados anteriores y comente lo que esta innovación tecnológica ha implicado.

Solución:

a) La combinación óptima de trabajo y capital que permite alcanzar un nivel de producción de 1 unidad verifica las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{w}{r}$$

$$1 = f(L,K) = L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}},$$

Donde la

$$PMg_L = \partial f(K,L)/\partial L = (1/4)K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{3}{4}},$$

mientras que, por otro lado, la

$$PMg_K = \partial f(K,L)/\partial K = (1/4)K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}},$$

sustituyendo estas expresiones en la primera ecuación y haciendo uso de los precios de los factores productivos obtenemos:

$$\frac{K}{L} = 2 \Rightarrow K = 2L$$

Sustituyendo esta relación en la segunda ecuación nos quedaría:

$$1 = f(L,K) = L^{\frac{1}{4}}(2L)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow L^* = \sqrt{2}/2 \cong 0,707$$

Por último, para obtener el nivel de capital óptimo no tenemos más que sustituir el nivel de trabajo óptimo en la relación $K = 2L \Rightarrow K^* = \sqrt{2} \cong 1,414$.

b) El coste total mínimo en el que incurre la empresa por producir una cantidad de 1 unidad viene dado por la ecuación:

$$C_T^* = wL^* + rK^* = 2\sqrt{2} \cong 2,828$$

c) Con esta nueva función de producción la combinación óptima de trabajo y capital ha de cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K}{4L} = 2 \Rightarrow K = 8L$$

$$1 = f(L,K) = L^{\frac{1}{4}}K$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda obtendríamos la cantidad óptima de trabajo:

$$1 = f(L,K) = L^{\frac{1}{4}}K = L^{\frac{1}{4}}8L \Rightarrow L^* = 8^{-\frac{4}{5}} \cong 0,189$$

Por último, la cantidad óptima de capital sería:

$$K = 8L \Rightarrow K^* = 8^{\frac{1}{5}} \cong 1,516$$

Con estas cantidades de factores productivos el coste total mínimo en el que incurre la empresa sería:

$$C_T^* = wL^* + rK^* = 2 \times 8^{-\frac{4}{5}} + 8^{\frac{1}{5}} \cong 1,895$$

d) Para obtener el volumen óptimo de producción que alcanzaría la empresa primero debemos calcular la combinación óptima de factores productivos

que implica un coste total mínimo de $C_T^* = 2\sqrt{2}$. En este caso dicha combinación de factores productivos ha de cumplir las siguientes ecuaciones:

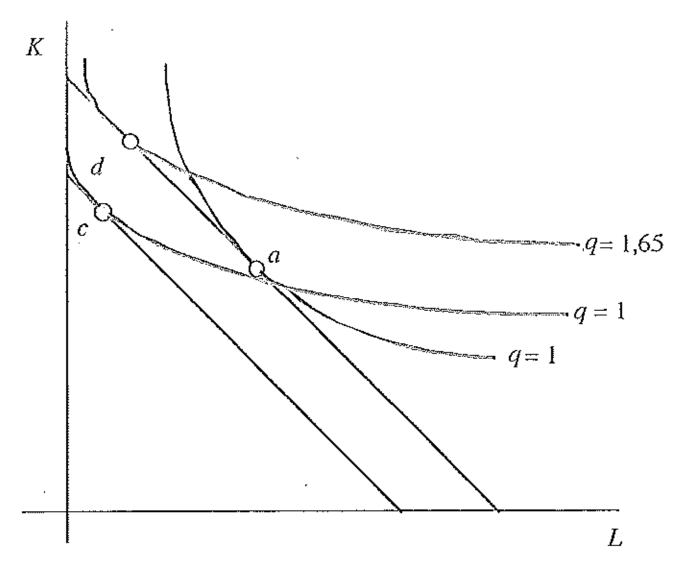
$$2\sqrt{2} = 2L^* + K^*$$

$$K^* = 8L^*$$

La solución de este sistema de ecuaciones establece que la combinación óptima de factores productivos es: $L^* = \sqrt{2}/5 \cong 0,283$ y $K^* = 8\sqrt{2}/5 \cong 2,263$. Sustituyendo estas cantidades en la función de producción obtenemos el volumen de producción óptimo que alcanzaría la empresa que sería igual a:

$$q^* = L^{\frac{1}{4}}K = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{5/4} \cong 1,650$$

e) Gráficamente



En esta figura los puntos *a*, *c* y *d* representan, respectivamente, las soluciones de los apartados ***a)*** $L^* = 0,707$, $K^* = 1,414$, $C_T^* = 2,828$, ***c)*** $L^* = 0,189$, $K^* = 1,516$, $C_T^* = 1,895$ y ***d)*** $L^* = 0,283$, $K^* = 2,263$, como vemos la mejora tecnológica ha provocado que las líneas isocuantas se vuelvan más planas y por tanto, para los mismos precios la empresa tiene incentivos para desplazarse hacia métodos de producción más intensivos en el uso del capital.

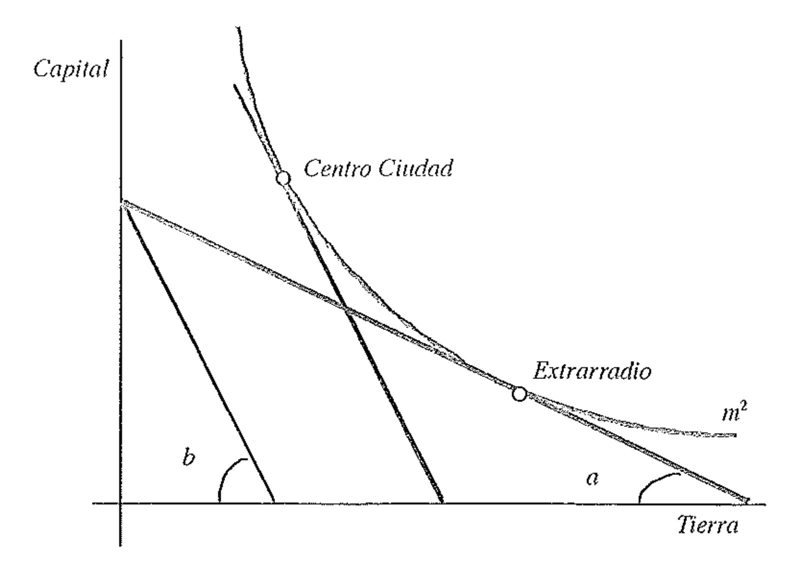
2. Por regla general los edificios son más altos en el centro de la ciudad que en el extrarradio. ¿Podría explicar este comportamiento a través de la teoría de la producción?

Solución:

En este caso el output o volumen de producción se mide en metros cuadrados de oficina, mientras que los factores productivos serían capital y terreno. Para producir metros cuadrados de oficina podemos:

a) Construir edificios muy altos, lo cual implica utilizar mucho capital y poco terreno. O bien,

b) Construir edificios bajos, lo cual implica usar menos capital y mucho terreno. Gráficamente estos dos casos quedarían representados en la siguiente figura:



Ahora bien, el precio de la tierra es menor en el extrarradio que en el centro de la ciudad, mientras que el precio de capital se puede considerar el mismo en ambos casos. En consecuencia, la isocoste es más inclinada en el centro de la ciudad, lo cual implica que la combinación óptima de factores productivos que minimiza el coste difiere en ambos casos, tal y como muestra la figura anterior.

Como vemos en el gráfico las isocostes en el extrarradio son menos inclinadas que las isocostes del centro de la ciudad (pendiente *b*). Por lo tanto, para construir un número de m^2 representados por la isocuanta podemos hacerlo:

- En el extrarradio usando más metros cuadrados de tierra y menos capital que en el centro de la ciudad.
- En el centro de la ciudad usando menos metros cuadrados de tierra y más capital que en el extrarradio.

3. Considere la función de producción:

$$q = f(L, K) = K^{1/2}L^{1/2},$$

donde q es el bien producido, K es el factor capital y L es el factor trabajo. Se pide:

a) Indique el tipo de rendimientos a escala que presenta la función de producción.

b) Obtenga las Productividades Marginales de los dos factores productivos y la Relación Marginal de Sustitución Técnica.

c) Si la empresa desea producir 100 unidades del bien y los precios de los factores son para el capital $r = 2$ y para el trabajo $w = 4$, ¿Qué cantidad de capital y de trabajo empleará la empresa para producir esa cantidad del bien al mínimo coste? ¿Cuál es el valor de ese coste?

d) Si en el corto plazo la empresa tiene un capital (factor fijo) igual a 100 ¿Podrá producir las 100 unidades al coste del apartado c)? En caso de respuesta negativa, ¿Cuál será el valor del nuevo coste?

e) Represente gráficamente la situación del apartado c) y del apartado d).

Solución

a) Se multiplican todos los factores productivos por λ:

$$(\lambda K)^{1/2}(\lambda L)^{1/2} = \lambda^{1/2}K^{1/2}\lambda^{1/2}L^{1/2} = \lambda K^{1/2}L^{1/2} = \lambda Y$$

$\Rightarrow$ Rendimientos Constantes a Escala

b)

$$PMg_L = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{1}{2}K^{1/2}L^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$$

$$PMg_K = \frac{\partial q}{\partial K} = \frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}$$

$$RMST_L^K = -\frac{PMg_L}{PMg_K} = -\frac{\frac{1}{2}\left(K/L\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}\left(L/K\right)^{1/2}} = -\frac{K}{L}$$

c)

$$\min C_T = 2K + 4L$$

$$\text{sujeto a } K^{1/2}L^{1/2} = 100$$

El lagrangiano asociado a este problema de minimización de costes es:

$$\mathrm{L} = 2K + 4L + \lambda\left(100 - K^{1/2}L^{1/2}\right)$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow -\lambda\left(\frac{1}{2}K^{1/2}L^{-1/2}\right) = 4 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow -\lambda\left(\frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/2}\right) = 2 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow K^{1/2}L^{1/2} = 100 \qquad [3]$$

Dividiendo [1] entre [2] obtendríamos la relación óptima entre el trabajo y el capital:

$$\frac{-\lambda\left(\frac{1}{2}K^{1/2}L^{-1/2}\right)}{-\lambda\left(\frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/2}\right)} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{K}{L} = 2 \Rightarrow K = 2L \qquad [4]$$

Sustituyendo [4] en [3] obtendríamos la cantidad óptima de trabajo:

$$\sqrt{2}\, L^{1/2}L^{1/2} = 100 \Rightarrow L^* = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2} \approx 70{,}71$$

Sustituyendo el valor óptimo de L en [4] obtenemos el *stock* de capital óptimo:

$$K^* = 2\left(50\sqrt{2}\right) = 100\sqrt{2} \approx 141{,}42$$

Por último, sustituyendo el *stock* de capital óptimo y la cantidad de trabajo óptima en la función de costes, obtenemos el valor del coste total mínimo que sería:

$$C_T^* = 2\left(100\sqrt{2}\right) + 4\left(50\sqrt{2}\right) = 400\sqrt{2} \approx 565{,}68$$

d) Puesto que a corto plazo K = 100 podemos sustituir esta cantidad en la función de producción en la que se establece que $q = 100 = K^{1/2}L^{1/2}$ y así obtenemos la cantidad de trabajo óptima:

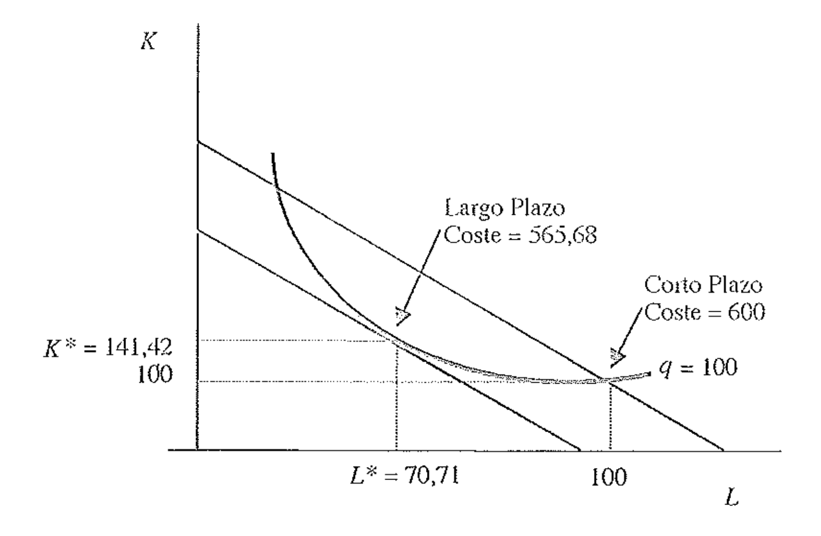
$$100 = (100)^{1/2}\, L^{1/2} \Rightarrow L^* = 100$$

Ahora, el valor del coste total mínimo a corto plazo es:

$$C_{T,cp}^* = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 100 = 600$$

Por tanto, $C_{T,cp}^* > C_T^*$, es decir, la empresa no podrá producir las 100 unidades a corto plazo al coste del apartado *c)*, tendrá que incurrir en un coste superior.

e) Gráficamente, la solución de largo plazo es la que se ha resuelto en el apartado *c)*, mientras que la solución correspondiente al corto plazo se ha obtenido en el apartado *d)*.



Problemas propuestos

1. Suponga que existe una empresa competitiva que tiene una función de producción $q = f(L,K) = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$, donde q mide el nivel de producción, K el nivel del factor de producción capital y L el nivel del factor de producción trabajo. Se pide:

a) Obtener la combinación óptima de trabajo y capital que permite alcanzar un nivel de producción de 4 unidades, cuando los precios de los factores productivos son $w = 2$, $r = 1$.

b) Calcular el coste total mínimo en el que incurre la empresa por producir una cantidad de 4 unidades.

c) Obtener la combinación óptima de trabajo y capital que permite alcanzar un nivel de producción de 4 unidades, cuando los precios de los factores productivos son $w = 0{,}5$, $r = 1$, así como el nuevo coste total mínimo en el que incurre la empresa.

d) Calcular el volumen óptimo de producción que alcanzaría la empresa si, para los precios dados en el apartado anterior, decide incurrir en el coste total del apartado b).

e) Represente gráficamente los apartados a), c) y d).

Solución:

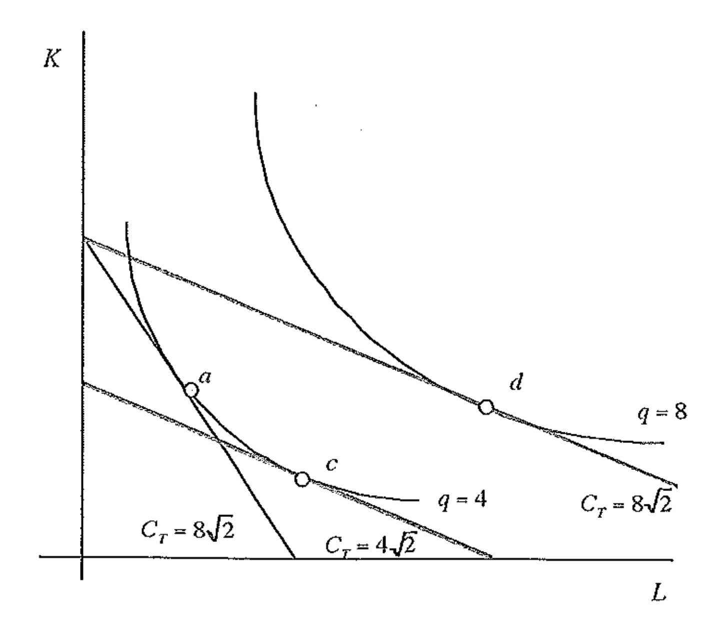
a) $L^* = 2\sqrt{2},\ K^* = 4\sqrt{2}$

b) $C_T^* = 8\sqrt{2}$

c) $L^* = 4\sqrt{2},\ K^* = 2\sqrt{2},\ C_T^* = 4\sqrt{2}$

d) $q^* = 8$

e) Gráficamente: Los puntos *a*, *c* y *d* corresponden con las soluciones de los apartados *a*, *c* y *d* respectivamente.



2. Considérese la función de producción:

$$q = f(K, L) = K \cdot L$$

donde q es la cantidad del bien producido con capital (K) y trabajo (L). Se pide:

a) Obténgase la función de costes a largo plazo si los precios de los factores son $r = 2$ y $w = 8$.

b ¿Cuál es la cantidad de capital y trabajo que hace mínimo el coste si se desean producir 36 unidades del bien q?

c) Repítanse los apartados a) y b) pero con los precios de los factores $r = 4$ y $w = 8$.

d) Determínese la función de costes a corto plazo si el *stock* de capital está dado y es igual a 6, así como la cantidad de trabajo que minimiza ese coste cuando se desean producir 36 unidades y los precios de los factores son los del apartado a).

Solución

a) $C_T^* = 8\sqrt{q}$.

b) $L^* = 3;\quad K^* = 12$.

c) $C_T^* = 6\sqrt{2q};\quad L^* = 3\sqrt{2};\quad K^* = 6\sqrt{2}$.

d) $C_T^* = 12 + \frac{4}{3}q\,;\quad L^* = 6$

3. Una empresa tiene una función de producción

$$q = f(K,L) = K^{1/3} L^{1/3}$$

donde q es el nivel de producción, K es el factor capital y L el factor trabajo.

a) ¿Qué tipo de rendimientos a escala presenta la función de producción anterior?

b) Obtenga las productividades marginales de los dos factores productivos y la relación marginal de sustitución técnica.

c) Obtenga la cantidad óptima de capital y trabajo si los precios de los factores productivos son ambos iguales a la unidad y el nivel de producción es 100.

d) ¿Cuál es el valor del mínimo coste para producir la cantidad anterior cuando el factor capital está fijo e igual a 500?

Solución:

a) Rendimientos decrecientes a escala.

b) $PMg_L = \frac{1}{3} K^{1/3} L^{-2/3}$; $PMg_K = \frac{1}{3} K^{-2/3} L^{1/3}$ $RMST_L^K = \frac{K}{L}$

c) $K^* = L^* = 1000$

d) $C_T^* = 2500$

Capítulo 6
Las funciones de costes de la empresa

CONCEPTOS CLAVE

Los **costes explícitos** de una empresa son los pagos realizados por los factores productivos. La **Función de costes a corto plazo** de la empresa es la suma del coste fijo y del coste variable, donde:

- El coste fijo refleja el coste del factor fijo y además *suponemos que es un coste irrecuperable*, es decir, un coste que la empresa no puede eludir aunque cierre.
- El coste variable refleja el coste del factor variable en función de la cantidad que se produce.

A partir de la función de costes a corto plazo se pueden derivar las siguientes funciones:

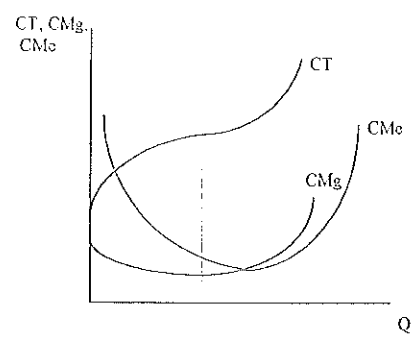
Coste fijo medio se obtiene dividiendo el coste fijo por la cantidad total producida.

Coste variable medio se obtiene dividiendo el coste variable por la cantidad total producida.

Coste medio a corto plazo se obtiene dividiendo el coste total a corto plazo por la cantidad total producida. Es el valor del coste por unidad de producto y es igual a la suma del coste fijo medio (coste fijo por unidad de producto) y del coste variable medio (coste variable por unidad de producto).

Coste marginal a corto plazo se obtiene como la pendiente de la función de coste variable y es la variación que se produce en el coste total cuando cambia la cantidad producida. Coincide con la variación del coste variable cuando varía la cantidad.

Gráficamente:



Cuando la empresa dispone de dos plantas para la obtención de una cantidad determinada, la asignación que minimizará los costes totales de producción de dicha cantidad se alcanza cuando los costes marginales de producción en ambas plantas son iguales, es decir, $CMg_1(q_1) = CMg_2(q_2)$, donde q_1 y q_2 son, respectivamente, las cantidades producidas en la planta 1 y 2.

Para obtener las funciones de Costes totales, Costes medios y Costes marginales a largo plazo partimos, en este capítulo, de las funciones de costes totales, de costes medios y de costes marginales a corto plazo para cada tamaño de planta –o lo que es lo mismo para cada nivel de *stock* de capital empleado– y se obtiene que:

La **Función de costes totales a largo plazo,** que determina el valor del coste para cada nivel de producción cuando todos los factores son variables, se corresponde con la envolvente de las curvas de coste a corto plazo.

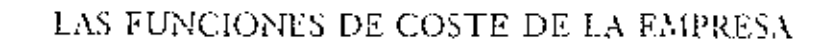
La **Función de coste medio a largo plazo,** que es el valor del coste total por unidad de producto, se corresponde con la envolvente de las curvas de coste medio a corto plazo.

Y la **Función de coste marginal a largo plazo** recoge la variación que se produce en el coste total a largo plazo cuando varía la cantidad.

Por último, decimos que en una empresa existen **economías de escala internas** si al aumentar el nivel de producción en una cantidad determinada el coste total aumenta en menos de esa cantidad, mientras que una empresa presenta **deseconomías de escala internas** cuando al aumentar el nivel de producción en una cantidad determinada el coste total aumenta en más de esa cantidad.

TEST

1. Si el precio que cobra una empresa competitiva es de 10 u.m, y la función de coste variable es 5Q:



a) La empresa debería cerrar.

b) La empresa debería cerrar si los costes fijos superan las 5 u.m.

c) La empresa debería cerrar si los costes fijos superan las 500 u.m.

d) La empresa no debería cerrar.

2. Suponga que la función de coste marginal viene dada por $CMg = 3Q$. Cuando la producción pasa de 5 a 10 unidades:

a) Los costes totales son 30 u.m.

b) Los costes totales se incrementan en 37,5 u.m.

c) Los costes variables se incrementan en 112,5 u.m.

d) Los costes variables se incrementan en 15 u.m.

3. Indique cuál de las siguientes curvas de costes <u>nunca</u> puede tener pendiente positiva:

a) El coste variable medio.

b) El coste total medio.

c) El coste marginal.

d) El coste fijo medio.

4. La curva de coste total a corto plazo de una empresa muestra:

a) El coste de producir cada cantidad de producto.

b) El coste mínimo de producir cada cantidad de producto cuando los dos factores productivos son variables.

c) El coste de producir cada cantidad de producto cuando al menos un factor productivo es fijo.

d) El coste mínimo de producir cada cantidad de producto cuando al menos un factor productivo es fijo.

5. Si la función de producción presenta siempre rendimientos crecientes a escala:

a) El coste medio y el coste marginal son siempre crecientes

b) El coste medio y el coste marginal son siempre decrecientes.

c) El coste medio es creciente y el coste marginal decreciente.

d) Ninguna respuesta es correcta.

6. En relación con los costes de la empresa a largo plazo:

a) El coste marginal es la curva envolvente de los costes marginales a corto plazo.

b) El coste medio es la curva envolvente de los costes medios a corto plazo.

c) El coste marginal y el medio no existen en el largo plazo.

d) Son correctas las respuestas a) y b).

Soluciones

1. d	2. c	3. d	4. d	5. b	6. b

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Una empresa posee una planta de producción con dos secciones: la sección A ha sido renovada recientemente y su coste variable viene dado por la expresión $CV_A = q_A + 2q_A^2$, donde q_A representa la producción de la planta A; por otro lado la sección B sigue utilizando maquinaria antigua y su función de coste variable es $CV_B = 9q_B + 3q_B^2$ donde q_B recoge la producción de la planta B. Se pide:

a) Si el volumen de producción total que ofrece la empresa es de una unidad, ¿Cómo debería asignarlo entre las dos plantas?

b) ¿Cuál es el coste marginal cuando la empresa ofrece un volumen de producción de una unidad?

c) Obtenga el mínimo volumen de producción que ha de ofrecer la empresa para que ambas plantas estén operativas.

d) Si el volumen de producción total que ofrece la empresa es de doce unidades, ¿Cómo debería asignarlo entre las dos plantas?

Solución:

a) La condición que nos asegura que la empresa está asignando óptimamente su producción entre ambas plantas es:

$$CMg_A = CMg_B \Rightarrow 1 + 4q_A = 9 + 6q_B$$

Por otro lado, también sabemos que siempre se ha de cumplir:

$$q_A + q_B = Q$$

Donde Q es el volumen total de producción de la empresa.

Operando algebraicamente con estas dos ecuaciones obtendríamos que:

$$q_B = \frac{4Q-8}{10}$$

Esta ecuación nos dice que para que $q_B > 0$ es necesario que $Q > 2$.

Por otro lado, también obtendríamos que:

$$q_A = \frac{6Q+8}{10}$$

Ecuación que nos dice que siempre que $q_A > 0$ entonces $Q > -\frac{8}{6}$. Por tanto, si el volumen total de producción que ofrece la empresa es de una unidad, la empresa sólo utiliza la planta A.

b) Dado que cuando la empresa produce sólo una unidad únicamente utiliza la planta A, el coste marginal coincide con el coste marginal de producir una unidad en la planta A, es decir:

$$CMg_A = 1 + 4q_A = 1 + 4 \cdot 1 = 5$$

c) Dado que la única restricción sobre el volumen de producción afecta tan sólo a la planta B, entonces podemos afirmar que para cualquier producción estrictamente superior a dos unidades ambas plantas estarán operativas.

d) Al igual que en el primer apartado las condiciones que se han de cumplir para que la empresa esté asignando óptimamente cualquier volumen de producción son:

$$q_B = \frac{4Q-8}{10}$$

$$q_A = \frac{6Q+8}{10}$$

Sustituyendo $Q = 12$ en ambas expresiones obtendríamos que las cantidades que la empresa produciría en cada planta son:

$$q_B^* = 4$$

$$q_A^* = 8$$

2. Dadas las siguientes funciones de producción ¿qué tipos de rendimientos presenta cada una de ellas? Derive las funciones de costes totales a largo plazo asociadas a cada una de ellas cuando tanto el salario como el tipo de interés son la unidad:

a) $f(L,K) = L^2K^2$

b) $f(L,K) = 3L + 5K$

c) $f(L,K) = L^{0.3} \cdot K^{0.6}$

Solución:

a) $f(mL, mK) = m^2L^2m^2K^2 = m^4L^2K^2 = m^4 f(L,K)$. Por tanto, dado que para todo $m > 1$, $f(mL, mK) > mf(L,K)$, esta función presenta Rendimientos Crecientes a Escala.

b) $f(mL, mK) = 3mL + 5mK = m(3L + 5K) = mf(L,K)$. Por tanto, dado que para todo $m > 1$, $f(mL, mK) = mf(L,K)$, esta función presenta Rendimientos Constantes a Escala.

c) $f(mL, mK) = m^{0.3}L^{0.3}m^{0.6}K^{0.6} = m^{0.9}L^{0.3}K^{0.6} = m^{0.9}f(L,K)$. Por tanto, dado que para todo $m > 1$, $f(mL, mK) < mf(L,K)$, esta función presenta Rendimientos Decrecientes a Escala.

Funciones de Costes Totales:

a) $\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{2LK^2}{2L^2K} = 1 \rightarrow K = L$. Por otro lado,

$q = f(L,K) = K^2L^2 \rightarrow q = L^2 L^2 \rightarrow L^* = q^{1/4} = K^*$. En consecuencia, la función de costes totales mínimos vendría dada por:

$$C_T^* = wL^* + rK^* = 2q^{1/4}$$

b) $\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{3}{5} \neq 1$

Por tanto, con estos precios esta empresa no alcanzaría una solución interior, sino que se situaría en una solución esquina.

c) $\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{0.3K}{0.6L} = 1 \rightarrow K = 2L$. Por otro lado,

$q = f(L, K) = K^{0.6}L^{0.3} \rightarrow q = (2L)^{0.6}L^{0.3} \rightarrow L^* = 2^{-0.6/0.9}q^{1/0.9} \rightarrow K^* = 2^{0.3/0.9}q^{1/0.9}$

En consecuencia, la función de costes totales vendría dada por:

$$C_T^* = wL^* + rK^* = 2^{-0.6/0.9}q^{1/0.9} + 2^{0.3/0.9}q^{1/0.9} \cong 1.89q^{1/0.9}$$

3. Una empresa tiene una función de producción

$q = f(K,L) = K^{1/2}L^{1/2}$,

donde q es el bien producido, K es el factor capital y L es el factor trabajo. Los precios de los factores son respectivamente $r = 10$ y $w = 40$. Se pide:

a) La empresa puede elegir entre tres tamaños de planta que vienen determinados por el *stock* de capital. En el tamaño 1 el capital es 400, en el tamaño 2 el capital es 625 y en el tamaño 3 el capital es 900. Determínese cuál debe ser el tamaño elegido según sea el nivel de producción deseado. Dibújese la curva de costes medios de la empresa.

b) Si la empresa pudiese elegir entre infinitos valores del capital, ¿Cuál es la función de costes a largo plazo de la empresa?

Solución

a) En este apartado tenemos que derivar las funciones de Coste Medio a corto plazo para cada tamaño de planta para lo que, en cada caso, se comienza obteniendo las funciones de Coste Total a corto plazo para cada planta.

Tamaño de planta 1 (K=400):

$$q = (400)^{1/2}L^{1/2} \Rightarrow L_1 = \frac{q^2}{400}$$

$$C_{T,1}^* = 10(400) + 40\left(\frac{q^2}{400}\right) = 4000 + 0{,}1q^2$$

$$CMe_1 = \frac{4000}{q} + 0{,}1q$$

Tamaño de planta 2 (K=625):

$$q = (625)^{1/2}L^{1/2} \Rightarrow L_2 = \frac{q^2}{625}$$

$$C_{T,2}^* = 10(625) + 40\left(\frac{q^2}{625}\right) = 6250 + 0{,}064q^2$$

$$CMe_2 = \frac{6250}{q} + 0{,}064q$$

Tamaño de planta 3 (K=900):

$$q=(900)^{1/2}L^{1/2}\Rightarrow L_3=\frac{q^2}{900}$$

$$C^*_{T,3}=10(900)+40\left(\frac{q^2}{900}\right)=9000+0{,}044q^2$$

$$CMe_3=\frac{9000}{q}+0{,}044q$$

El tamaño de planta elegido por la empresa depende del nivel de producción. Para determinar el tamaño correspondiente a cada nivel de producción hay que igualar la función de costes medios de un tamaño de planta con el siguiente. De este modo se obtiene el valor de la producción a partir del cual hay que elegir un tamaño de planta superior.

$$CMe_1=CMe_2$$

$$\frac{4000}{q}+0{,}1q=\frac{6250}{q}+0{,}064q$$

$$q_1^*=250$$

$$CMe_2=CMe_3$$

$$\frac{6250}{q}+0{,}064q=\frac{9000}{q}+0{,}044q$$

$$q_2^*=370{,}8$$

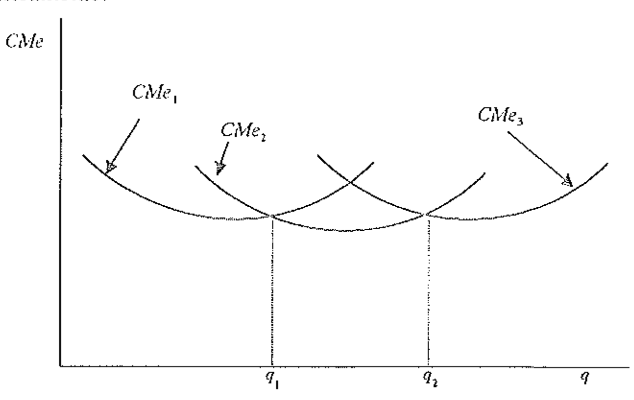
Por tanto,

Si $0\leq q\leq 250\Rightarrow$ Tamaño de planta 1

Si $250<q\leq 370{,}8\Rightarrow$ Tamaño de planta 2

Si $q>370{,}8\Rightarrow$ Tamaño de planta 3

Gráficamente:



b) En este apartado obtendremos la función de costes totales mínimos de la empresa a largo plazo, es decir, el capital (el tamaño de la planta) es ahora un factor variable. Para ello, la empresa se enfrenta al siguiente problema:

$$\min C_{T,Lp}=10K+40L$$

$$\text{sujeto a } q=K^{1/2}L^{1/2}$$

Resolviendo el problema de minimización:

$$RMST_L^K=-\frac{K}{L}=-\frac{w}{r}=-\frac{40}{10}=-4\Rightarrow K=4L$$

Sustituyendo en la restricción:

$$q=(4L)^{1/2}L^{1/2}\Rightarrow L^*=\frac{q}{2}$$

En consecuencia,

$$K=4\left(\frac{q}{2}\right)\Rightarrow K^*=2q$$

Por tanto, la función de costes totales mínimos a largo plazo de la empresa es:

$$C^*_{T,Lp}=10(2q)+40\left(\frac{q}{2}\right)=40q$$

Problemas propuestos

1. Una empresa tiene la siguiente función de costes totales:

$$C_T^*=4q^3-6q^2+2$$

Determine el punto de corte entre el coste medio y el coste marginal y muestre que el mínimo del coste marginal se encuentra a la izquierda del mínimo coste medio.

Solución

Punto de corte: $q_{corte} = 1$.

Mínimo coste marginal: $q_{\min Cmg} = 0{,}5 < 1 = q_{corte}$.

2. Una empresa desea contratar capital y trabajo para producir un bien determinado. Teniendo en cuenta que el precio del capital es la mitad del precio del trabajo y que la función de producción es:

$q = f(K,L) = L\sqrt{K}$.

Se pide:

a) Obtener la cantidad de K y L que hace mínimo el coste de producción para cualquier nivel de producción.

b) La expresión de la función de coste total mínimo.

Solución:

a) $L^* = K^* = q^{2/3}$.

b) $C_T^* = A \cdot q^{2/3}$, siendo $A = w + r = w + \frac{1}{2}\ w = \frac{3}{2}\ w$.

3. Una empresa desea producir 50 unidades de un determinado bien empleando capital y trabajo. Si el precio del capital es $r = 8$ y el del trabajo $w = 4$ y la tecnología disponible viene representada por la función de producción:

$$q = f(K,L) = K\sqrt{L},$$

a) Obtenga la función de costes totales mínimos a largo plazo de la empresa.

b) Obtenga la función de costes totales mínimos a corto plazo de la empresa si el capital es igual a 5.

Solución:

a) $C^*_{T,\,Lp} = 12q^{2/3}$

b) $C^*_{T,\,Cp} = 40 + 0{,}16q^2$

Capítulo 7
Las funciones de oferta de una empresa competitiva

CONCEPTOS CLAVE

Una empresa **precio-aceptante** o competitiva actúa como si el precio de mercado fuera independiente del número de unidades vendidas por la empresa, es decir, la empresa responde frente a cambios en el precio de mercado pero no lo determina. En consecuencia, el supuesto de aceptación de precios implica que la **función de demanda de la empresa** es una línea horizontal a la altura del precio de mercado.

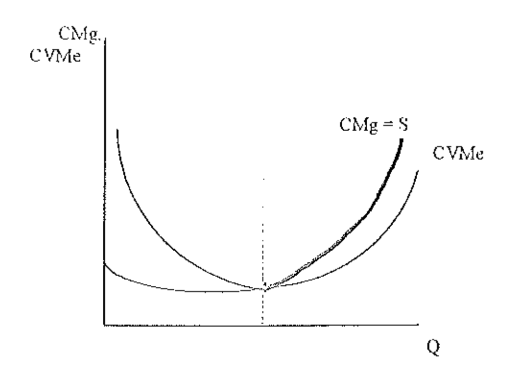
El **Ingreso Marginal** se define como la variación que experimenta el ingreso total debido a un cambio en la cantidad vendida, es decir, matemáticamente el ingreso marginal se corresponde con la derivada de la función de ingreso total con respecto a la cantidad:

$$IMg = \frac{dIT}{dq}.$$

En el caso de una empresa precio-aceptante, el Ingreso Marginal es igual al precio de mercado.

Una empresa **competitiva** presenta una **elasticidad precio de la demanda** infinitamente elástica.

La **Función de Oferta a corto plazo** muestra la cantidad ofrecida por la empresa a cada precio cuando al menos un factor de producción es fijo. La función de oferta, bajo estas condiciones, es el tramo de la función de costes marginales a corto plazo que se sitúa por encima de la función de costes variables medios.



En el corto plazo la empresa produce sólo si el ingreso total es igual o excede al coste variable, es decir, $Pq \geq CV \rightarrow P \geq CVMe \rightarrow CMg \geq CVMe$. Si no supera este nivel nos situaríamos en la **Condición de cierre a corto plazo**. En este sentido definimos como el **Precio de cierre** al que coincide con el mínimo de la función de costes variables medios y es el precio por debajo del cual la empresa no ofrecerá nada.

También definimos como **Mínimo de Explotación** a la cantidad que minimiza la función de Costes Variables Medios. Se define como **Óptimo de Explotación** a la cantidad que minimiza la función de Costes Medios.

La **Función de Oferta a largo plazo** muestra la cantidad ofrecida por la empresa a cada precio cuando todos los factores de producción son variables. Coincide con el tramo de la función de costes marginales a largo plazo que se sitúa por encima de la función de costes medios a largo plazo. En este caso, a largo plazo la empresa sólo produce si el beneficio es mayor o igual que cero, es decir, el precio debe ser superior al coste medio a largo plazo. La **Condición de cierre a largo plazo** se produce si el precio fuera inferior al coste medio a largo plazo.

TEST

1. A corto plazo, una empresa competitiva debería cerrar si:

a) El ingreso total es menor que el coste total.

b) El precio es menor que el coste medio.

c) El precio es menor que el coste variable medio.

d) El ingreso total medio es menor que el coste total medio.

2. Si el precio del producto de una empresa competitiva es 20, los costes fijos son 100 y el coste marginal es igual a 2Q:

a) La empresa debería producir Q = 5.

b) La empresa debería producir Q = 50.

c) La empresa debería cerrar.

d) La empresa debería producir Q = 10.

3. Si una empresa competitiva está produciendo en el corto plazo en el punto donde el coste marginal es igual al precio siendo el coste marginal creciente, un incremento de la producción:

a) Aumentará los beneficios porque el coste marginal a corto plazo será mayor que el precio.

b) Disminuirá los beneficios porque el coste marginal a corto plazo será menor que el precio.

c) Aumentará los beneficios porque el coste marginal a corto plazo será menor que el precio.

d) Disminuirá los beneficios porque el coste marginal a corto plazo será mayor que el precio.

4. En relación a una empresa precio-aceptante podemos afirmar que:

a) Actúa como si el precio estuviera dado.

b) Su función de demanda es una línea horizontal.

c) La elasticidad precio de su curva de demanda es infinita.

d) Todas las respuestas son correctas.

5. En una empresa competitiva:

a) El ingreso marginal es siempre inferior al precio.

b) El ingreso marginal es siempre superior al ingreso medio.

c) El ingreso medio es siempre superior al ingreso marginal.

d) El ingreso medio es igual al ingreso marginal.

6. Una empresa competitiva que maximiza beneficios a largo plazo:

a) Agota totalmente todas las economías de escala internas.

b) Agota totalmente las deseconomías de escala internas.

c) Nunca agota todas las economías de escala internas.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución test:

1. c	2. d	3. d	4. d	5. d	6. a

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Suponga que existe una empresa competitiva que tiene una función de producción $q = f(L,K) = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$, donde q mide el nivel de producción, K el nivel del factor de producción capital y L el nivel del factor de producción trabajo. Si los precios de los factores productivos son $w = 2$, $r = 1$ se pide:

a) Obtenga la ecuación de la curva de oferta de la empresa a largo plazo.

b) Derívese la ecuación de la curva de oferta de la empresa a corto plazo cuando $K = 1$.

c) ¿Para qué nivel de producción es $K = 1$ el tamaño óptimo de la empresa a largo plazo?

Solución:

a) Para obtener la ecuación de la curva de oferta de la empresa a largo plazo el problema que resuelve la empresa es:

$$\min_{K,L} CT = wL + rK = 2L + K$$
$$\text{s.a } q = f(L,K) = K^{1/2}L^{1/2}$$

De la solución de este problema de minimización de costes obtenemos como condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{PMg_L}{PMg_K} = \dfrac{w}{r} \\ q = K^{1/2}L^{1/2} \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} \dfrac{K}{L} = 2 \to K = 2L \\ q = (2L)^{1/2}L^{1/2} \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} L^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}q \\ K^* = \sqrt{2}q \end{matrix}$$

En consecuencia la función de costes totales de esta empresa sería:

$$CT = wL^* + rK^* = \sqrt{2}q + \sqrt{2}q = 2\sqrt{2}q$$

Por tanto, las funciones de Costes Marginales y Costes Medios, cuyo cálculo es necesario para obtener la función de oferta a largo plazo de la empresa, serían:

$$CMg = CMe = 2\sqrt{2}$$

En consecuencia, la función de oferta a largo plazo de la empresa es:

$$P_q = 2\sqrt{2}$$

b) Si $K = 1 \to q = L^{1/2} \to L = q^2 \to CT_{c.p} = 1 + 2q^2$ y las funciones de coste marginal y coste variable medio asociadas a esta función de costes totales a corto plazo serían:

$$CMg_{c.p} = 4q$$
$$CVMe_{c.p} = 2q$$

Dado que el mínimo de los costes variables medios es cero, la función inversa de oferta a corto plazo de esta empresa coincide con su función de costes marginales, es decir:

$$P_q = 4q^s_{c.p} \to q^s_{c.p} = P_q / 4$$

c) Para que $K = 1$ sea óptimo a largo plazo se ha de verificar que:

$$K = 1 = K^*_{l.p} = 2L \to L^* = 1/2$$

Con estas cantidades de factores productivos y dada la función de producción, la empresa produciría una cantidad:

$$q = f(L,K) = K^{1/2}L^{1/2} = 1^{1/2}(1/2)^{1/2} = \sqrt{2}/2 \cong 0{,}71$$

2. ¿Que justificación encontramos en la teoría de la producción para favorecer el comercio internacional?

Solución:

Si existen economías de escala en la producción de un bien, entonces el coste medio de producción sería menor si las empresas de un país se especializasen en la producción de este bien, lo cual permitiría que la producción se situase en un punto más bajo de la curva de costes medios. En consecuencia, dado que el coste medio sería menor, el bien se ofrecería a precios menores. Por el contrario, la autarquía puede implicar que no se aprovechen al máximo las economías de escala.

3. Una empresa competitiva tiene una función de costes totales a largo plazo:

$$CT(X) = 2X^3 - X^2 + X\,.$$

a) Obténgase la curva de oferta de la empresa y el nivel de producción que minimiza el coste medio.

b) ¿Cuál es la cantidad producida si el precio es igual a 10?

Solución

a) La curva de oferta de la empresa se corresponde con el tramo creciente de la curva de coste marginal a partir del mínimo coste medio.

$$CMe = \frac{CT}{X} = 2X^2 - X + 1$$

$$CMg = \frac{\partial CT}{\partial X} = 6X^2 - 2X + 1$$

$$CMe = CMg$$

$$2X^2 - X + 1 = 6X^2 - 2X + 1$$

$$4X^2 - X = 0 \begin{cases} X = 0 \\ 4X - 1 = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{4} = 0,25 \end{cases}$$

Como el nivel de producción que hace mínimo el coste medio es $X = 0,25$ el precio mínimo al que venderá la empresa es $P = 0,875$. Por tanto, la función de oferta será:

$$P = 6X^2 - 2X + 1 \text{ cuando } X \geq 0,25 \text{ (es decir, } P \geq 0,875)$$

b) Para obtener la cantidad producida con un precio de 10, se sustituye dicho precio en la anterior función de oferta:

$$10 = 6X^2 - 2X + 1 \Rightarrow 6X^2 - 2X - 9 = 0$$

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{220}}{12} = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{220}}{12} \Rightarrow \text{No tiene sentido económico} \\ \frac{2 + \sqrt{220}}{12} = 1,40 \end{cases}$$

Problemas propuestos

1. Suponga que para una empresa competitiva la función de costes totales a corto plazo viene dada por $CT = 600 + 5q + 6q^2$:

a) Derívese las funciones de coste marginal, coste variable, coste variable medio, coste fijo, coste fijo medio y coste medio asociadas a esta función de costes totales.

b) Si el precio de mercado es de 101 unidades monetarias, ¿cuántas unidades producirá la empresa? ¿Qué ocurrirá en el largo plazo? Razone su respuesta.

Suponga ahora que el ayuntamiento de la localidad en la que está ubicada la empresa desea asegurar que esta empresa siga produciendo. Para ello se proponen dos alternativas. La primera propuesta consiste en otorgar a la empresa una subvención de suma fija, S, que cubra sus pérdidas de funcionamiento. La segunda propuesta consiste en otorgar a la empresa una subvención de s unidades monetarias por cada unidad de producción.

c) ¿Cuál es la cuantía mínima de la subvención de suma fija que evita el cierre de la empresa?

d) ¿Cuál es la cuantía mínima de la subvención por unidad producida que evita el cierre de la empresa?

e) ¿Qué propuesta es la más barata? ¿Por qué? Razone su respuesta.

Solución:

a) $CMg = 12q + 5$, $CV = 5q + 6q^2$, $CVMe = 5 + 6q$, $CF = 600$, $CFMe = 600/q$, $CMe = \frac{600}{q} + 5 + 6q$.

b) $q^* = 8$, $\pi^* = -216 \rightarrow$ A largo plazo esta empresa cerraría.

c) $S^* = 216$.

d) $s^* = 24$.

e) El primer esquema.

2. Una empresa competitiva presenta la siguiente función de costes a corto plazo:

$$CT = 1600 + 0,4q^2$$

Se pide:

a) Obtenga el coste medio, distinguiendo entre el coste fijo medio y el coste variable medio, y el coste marginal.

b) La curva de oferta a corto plazo de la empresa indicando el precio a partir del cual la cantidad ofrecida será cero.

c) El precio mínimo para que la empresa obtenga beneficios no negativos.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} CFMe = \dfrac{1600}{q} \\ CVMe = 0,4q \end{array}\right\} \Rightarrow CMe = \dfrac{1600}{q} + 0,4q$

$CMg = 0,8q$

b) $P = 0,8q,\ \forall P \geq 0$

c) $P = 50,6$

3. La función de costes a corto plazo de una empresa competitiva es:

$$CT = 1000 + 3q^2 + 5q.$$

a) Determine la curva de oferta de la empresa.

b) Si la curva de demanda del bien Y a la que se enfrenta la empresa es $P = 2 + 7q$, obtenga la cantidad y el precio de equilibrio.

Solución:

a) $P = 5 + 6q.$

b) $q = 3; P = 23.$

Capítulo 8
La determinación del precio en una industria competitiva

CONCEPTOS CLAVE

El **Equilibrio de una industria** es una situación en la que la industria está en estado de reposo, es decir, donde el precio y la cantidad que produce cada empresa son estables dadas las funciones de demanda y de oferta de mercado. Es, por tanto, una situación que satisface las condiciones de optimalidad individual: cada consumidor y cada empresa se sitúa en un óptimo, y la condición de consistencia agregada: el mercado se vacía, esto es, al precio de equilibrio la oferta de la industria es igual a la cantidad que se demanda en dicho mercado.

En una **Industria con costes constantes**, todas las empresas son semejantes y un cambio en el volumen de producción de la industria no cambia los precios de los factores productivos utilizados por todas las empresas de dicha industria ni altera las funciones de producción de las empresas de dicha industria. Por tanto, la **Función de oferta a largo plazo de una Industria con costes constantes** es una línea horizontal a la altura del mínimo de la función de costes medios a largo plazo.

Sin embargo, la **Función de oferta a corto plazo de una Industria con costes constantes** es la suma horizontal de las funciones de oferta a corto plazo de cada una de las empresas.

Una **Industria con costes crecientes** es una industria en la que un incremento en el volumen de producción de la industria aumenta los precios de algunos de los factores productivos que utilizan las empresas desplazando hacia arriba las funciónes de coste medio y de coste marginal a largo plazo.

La **Deseconomía de escala pecuniaria externa** es la deseconomía monetaria que se produce debido a que el precio de un factor productivo aumenta cuando se produce un incremento en el volumen de producción de la industria, y no en el volumen de producción de la empresa.

Una **renta económica** existe cuando el precio cobrado por unidad de un factor productivo es superior al precio mínimo requerido para ofrecer dicha unidad.

Una **Licencia** es un documento legal que otorga a su poseedor el derecho a par-

ticipar en alguna actividad industrial. A través de ellas se impide que nuevas empresas entren en una industria, permitiendo que puedan existir beneficios positivos y puedan provocar que el volumen de producción no se genere al coste total más bajo.

Un Impuesto unitario es un impuesto que grava con t unidades monetarias cada unidad vendida por la empresa (donde t puede ser cualquier cantidad mayor que cero). Su establecimiento sobre una industria competitiva incrementa el precio de mercado, reduce el volumen de producción y reduce la suma de los excedentes del consumidor y del productor.

TEST

1. Si una industria competitiva con costes constantes se halla en equilibrio a largo plazo y la demanda se reduce:

a) En el inmediato corto plazo tanto la producción de la empresa como el número de empresas de la industria se reducirá.

b) En el inmediato corto plazo la producción de la empresa se reducirá y el número de empresas de la industria permanecerá constante.

c) A largo plazo la producción de la empresa se reducirá y el número de empresas de la industria permanecerá constante.

d) A largo plazo tanto la producción de la empresa como el número de empresas de la industria se reducirá.

2. Suponga que los consumidores del tipo A tienen una función de demanda inversa que viene dada por $P_a = 20 - 4Q_a$ y los del tipo B tienen una función de demanda inversa que viene dada por $P_b = 10 - Q_b$. Si la industria competitiva produce un total de 10 unidades, ¿cuánto se compraría en cada mercado?

a) $Q_a = 4$, $Q_b = 6$.

b) $Q_a = 3$, $Q_b = 7$.

c) $Q_a = 5$, $Q_b = 5$.

d) $Q_a = 7$, $Q_b = 3$.

3. Si una empresa en una industria competitiva está en equilibrio a <u>corto plazo</u>:

a) Los beneficios son cero.

b) Los beneficios pueden ser cero, positivos o negativos.

c) El precio puede ser inferior al coste variable medio a corto plazo.

d) El precio puede ser mayor que el coste marginal.

4. Si en una industria competitiva con costes constantes que se encuentra en equilibrio a largo plazo se produce un aumento de la demanda, se sabe que:

a) Tanto a corto plazo como a largo plazo los beneficios son positivos.

b) Tanto a corto plazo como a largo plazo los beneficios son nulos.

c) En el nuevo equilibrio a largo plazo el precio y los beneficios vuelven a ser los de la situación inicial.

d) A largo plazo el precio y los beneficios aumentan.

5. En una industria con costes constantes cuando hay libertad de entrada a largo plazo:

a) Presenta una curva de oferta con pendiente positiva.

b) Presenta una curva de oferta horizontal.

c) La curva de oferta es totalmente inelástica.

d) Ninguna de las anteriores.

6. En una industria con barreras a la entrada (no existe libertad de entrada) ante un aumento de la demanda de mercado:

a) La cantidad producida y el precio no varían.

b) No habrá más remedio que permitir la entrada de empresas nuevas.

c) El precio de equilibrio aumenta al no poder entrar nuevas empresas.

d) El precio se mantiene y la cantidad producida aumenta al no entrar nuevas empresas.

Solución

1. b	2. a	3. b	4. c	5. b	6. c

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Considere una industria con 100 empresas, siendo la función de Coste total de cada empresa individual: $CT_i = 10x_i^2 + 2x_i + 10$, para $i = 1 \dots 100$, y donde la demanda de mercado viene dada por: $X^D = 100 - 4P_X$.

a) Derive la curva de oferta a corto plazo de cada empresa.

b) Derive la curva de oferta a corto plazo de la industria.

c) Calcule el equilibrio a corto plazo de la industria.

d) Calcule el equilibrio a corto plazo de cada empresa y el beneficio.

Solución:

a) Para derivar la curva de oferta a corto plazo de cada empresa vamos a necesitar calcular las funciones de *CVMe*, de *CMg* y de *CMe* a corto plazo de cada empresa que en este caso vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$CVMe_i = \frac{CV_i}{x_i} = 10x_i + 2$$
$$CMe_i = \frac{CT_i}{x_i} = 10x_i + 2 + \frac{10}{x_i}$$
$$CMg_i = \frac{\partial CT_i}{\partial x_i} = 20x_i + 2$$

Dado que el mínimo de los coste variables medios es $x_i = 0$, para todo $x_i \geq 0$, la función inversa de oferta de cada empresa coincide con su función de costes marginales, es decir: $P_X = 20x_i^s + 2$. En consecuencia, la función de oferta de cada empresa sería:

$$x_i^s = \frac{P_X - 2}{20}$$

b) La curva de oferta agregada de la industria a corto plazo se obtiene sumando horizontalmente las decisiones individuales de oferta de las empresas. Es decir, para cada nivel de precios sumamos la cantidad que cada empresa está dispuesta a ofrecer. Por tanto, la curva de oferta agregada de la industria sería:

$$X_{c.p}^S = \sum_{i=1}^{100} x_i^s = \sum_{i=1}^{100} \frac{P_X - 2}{20} = 100\left(\frac{P_X - 2}{20}\right) = 5P_X - 10$$

c) El equilibrio a corto plazo de la industria viene dado por:

$$X^D = X^S \Rightarrow 100 - 4P_X = 5P_X - 10 \Rightarrow \begin{cases} P_X^* = 12{,}22 \\ X^* = 51{,}12 \end{cases}$$

d) La cantidad que cada empresa ofrece viene dada por:

$$x_i^s = \frac{P_X - 2}{20} = \frac{12{,}22 - 2}{20} = 0{,}511$$

Y el beneficio sería: $\pi_i = IT_i - CT_i = P_X \cdot x_i^s - CMe \cdot x_i^s = -7{,}39$. Al obtener un beneficio negativo podemos concluir que a largo plazo se reducirá el número de empresas de esta industria.

2. La función de demanda de una industria competitiva es: $P_X = 104 - X$ donde X es la producción total de esta industria. La función de producción para todas las empresas del sector es: $x_i = L^{1/4}K^{3/4}$, donde x_i es la producción de la empresa i-ésima, L el trabajo y K es el capital. El salario por unidad de trabajo es de 1 unidad monetaria y el precio por unidad de capital es de 3 unidades monetarias. A corto plazo en cada una de las empresas de la industria existe un nivel de capital de $K = 1$. Se pide:

En el corto plazo:

a) Calcular las curvas de costes de cualquier empresa del sector.

b) Determinar el equilibrio de mercado que hace que el beneficio de cada empresa sea nulo así como el número de empresas que producirían en esta situación.

c) Obtener la curva de oferta de la industria para el apartado anterior.

En el largo plazo:

d) Calcular las curvas de costes de cualquier empresa del sector.

e) Determinar la curva de oferta de la industria y el equilibrio a largo plazo.

f) Hallar el beneficio de una empresa e interpretar el resultado.

Solución:

a) Si $K = 1 \rightarrow x_i = L^{1/4} \rightarrow L = x_i^4 \rightarrow CT_{c.p}^i = 3 + x_i^4$ y las funciones de coste marginales, costes medios y costes variables medios asociadas a esta función de costes totales a corto plazo serían:

$$CMg_i = 4x_i^3$$
$$CVMe_i = x_i^3$$
$$CMe_i = x_i^3 + 3/x_i$$

Dado que para todo $x_i > 0$ el coste marginal es mayor que el coste variable medio la curva inversa de oferta de la empresa i-ésima coincide con su curva de costes marginales, es decir:

$$P_X = 4x_i^3$$

b) A corto plazo el beneficio de la empresa es nulo cuando dicha empresa está situada en el óptimo de explotación, es decir, cuando produce la cantidad que minimiza la función de costes medios a corto plazo, es decir:

$$\pi^i_{c.p} = 0 \Rightarrow P_X = \min CMe_i$$

La cantidad que minimiza la función de costes medios se puede obtener a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial CMe_i}{\partial x_i} = 0 \rightarrow 3x_i^2 - 3/x_i^2 = 0 \rightarrow x_i^* = 1$$

Una vez obtenida la cantidad que ha de producir cada empresa para que su beneficio sea nulo la sustituimos en la función inversa de oferta y obtendríamos el precio de equilibrio que sería:

$$P_X^* = 4(x_i^*)^3 = 4$$

Por último, para obtener la cantidad que se ofrece y se demanda en el mercado así como el número total de empresas que existirían sustituimos el precio de equilibrio en la función de demanda y obtenemos la cantidad total de equilibrio de este mercado que sería:

$$X^* = -P_X^* + 104 = 100$$

Y, dado que todas las empresas son idénticas y cada una produce 1 unidad, existirían 100 empresas en este mercado.

c) La curva de oferta agregada de la industria a corto plazo se obtiene sumando horizontalmente las decisiones individuales de oferta de las empresas. Es decir, para cada nivel de precios sumamos la cantidad que cada empresa está dispuesta a ofrecer. Por tanto, la curva de oferta agregada de la industria sería:

$$X^S_{c.p} = \sum_{i=1}^{100} x_i^s = \sum_{i=1}^{100}\left(\frac{P_X}{4}\right)^{1/3} = 100\left(\frac{P_X}{4}\right)^{1/3} \rightarrow X^S_{c.p} = \frac{100}{4^{1/3}} P_X^{1/3}$$

d) Para obtener las curvas de costes en el largo plazo en cualquier empresa del sector trabajamos con las siguientes ecuaciones:

$$\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{K}{3L} = \frac{1}{3} \rightarrow K = L$$

$$x_i = L^{1/4}K^{3/4}$$

Operando con estas dos ecuaciones obtenemos que las funciones de demanda óptimas de los factores productivos serían:

$$K^* = x_i = L^*$$

Dadas estas funciones de demanda óptimas de los factores productivos las funciones de costes serían:

$$CT^i_{l.p} = x_i + 3x_i = 4x_i$$

$$CMg^i_{l.p} = CMe^i_{l.p} = 4$$

e) La curva de oferta de la industria, sería una línea horizontal a la altura del precio igual a 4, es decir: $P_X = 4$. Por otro lado, el beneficio a largo plazo en una industria competitiva es nulo, esto implica que el precio de equilibrio coincide con el mínimo de la función de costes medios a largo plazo, es decir:

$$P_X^* = \min CMe_{l.p} = 4$$

Si sustituimos este precio en la función de demanda de mercado obtenemos que la cantidad de equilibrio a largo plazo sería de 100 unidades.

f) El beneficio a largo plazo de cada empresa es nulo dado que el precio de equilibrio coincide con el coste medio de producción de cada unidad.

3. Una industria competitiva con costes constantes y libertad de entrada está formada por empresas idénticas. La función de costes de una empresa cualquiera de la industria es:

$$CT(X) = 2X^3 - 4X^2 + 5X$$

Se pide:

a) ¿Cuál es el nivel de producción y el precio de equilibrio a largo plazo de la empresa?

b) Si la curva de demanda de mercado es

$$P = 900 - 3X$$

¿Cuál es el número de empresas que forman la industria?

Solución

a) A largo plazo en una industria competitiva con costes constantes y libertad de entrada el precio coincide con el mínimo del coste medio.

$$CMe = 2X^2 - 4X + 5$$

Para calcular el mínimo se iguala a cero la derivada primera con respecto a X.

$$\frac{\partial CMe}{\partial X} = 0 \Rightarrow 4X - 4 \Longrightarrow X_{EMPRESA} = 1$$

Por tanto, el precio de venta del bien X es:

$$P = CMe(X = 1) = 2(1)^2 - 4(1) + 5 = 3$$

b) Puesto que el precio es 3:

$$3 = 900 - 3X \Rightarrow X_{TOTAL} = 299$$

El número de empresas es:

$$\text{n° empresas} = \frac{X_{TOTAL}}{X_{EMPRESA}} = \frac{299}{1} = 299$$

Problemas propuestos

1. De acuerdo con una reciente encuesta la demanda diaria de pan de una pequeña ciudad puede ser aproximada mediante la siguiente función:

$$Q = 60 - 2P$$

donde P representa el precio por unidad. Asimismo, la función de costes totales de cada panadería es:

$$C(q_i) = q_i^3 - 4q_i^2 + 8q_i \qquad \forall i = 1,\ldots,N$$

a) Si la industria del pan en esta ciudad fuera competitiva, ¿cuál sería el precio en el mercado a largo plazo? ¿Cuál sería el número de unidades producidas diariamente? ¿Cuántas panaderías habría en la ciudad? (Tenga en cuenta la condición de beneficio a largo plazo en una industria competitiva).

b) Suponga que el Ayuntamiento concede una licencia exclusiva de producción a una sola panadería. ¿Cuál sería ahora el precio, el nivel total de producción y los beneficios del monopolista?

c) Comente, desde el punto de vista de los compradores, cuál de las dos estructuras anteriores es preferible. Justifique su respuesta en términos de excedente.

Solución:

a) $P^* = 4,\ Q^* = 52,\ N = 26$

b) $P^* \cong 28,\ Q^* \cong 4,\ \pi^* \cong 80$

c) Excedente Consumidores en Industria competitiva: 676.

Excedente Consumidores en Monopolio: 4.

2. "En una industria con costes constantes puede existir una curva de oferta a largo plazo creciente". Explique por qué está de acuerdo o en desacuerdo con esta afirmación.

Solución:

El establecimiento de licencias o cualquier otra barrera a la entrada.

3. Suponga que en una industria competitiva con costes constantes donde todas las empresas son idénticas la función de costes de una empresa cualquiera i es:

$$CT_i = X_i^3 - 4X_i^2 + 10X_i$$

a) Determine el precio y la cantidad de equilibrio a largo plazo, de cada empresa y de la industria, si existe libertad de entrada en la industria y la función de demanda de mercado a la que se enfrenta es $P = 50 - 2X$.

b) ¿Cuál es el número de empresas que forman la industria?

c) Suponga ahora que la demanda de mercado aumenta, siendo su función $P = 100 - 2X$, y que el número de empresas se encuentra limitado a 11 (existen barreras a la entrada) ¿cuál es la producción de cada empresa?

Solución:

a) $X_{emp} = 2$; $X_{ind} = 22$; $P = 6$

b) N° empresas = 11

c) $X_{emp} = 3{,}62$; $X_{ind} = 39{,}82$; $P = 20{,}36$

Capítulo 9
La fijación de precios en el monopolio y la discriminación de precios

CONCEPTOS CLAVE

El monopolio de mercado se caracteriza por los siguientes supuestos: primero, **los competidores no pueden entrar en la industria**; y segundo, **no hay sustitutivos próximos** para el bien que produce el monopolista.

El monopolista es el único oferente de un determinado producto y fija el precio del bien teniendo en cuenta la demanda de mercado.

La variación del ingreso total del monopolista cuando varía una unidad de producción viene dada por el **ingreso marginal**, $IMg(q)$. Sabiendo que el ingreso total es $IT = PQ$ y utilizando la función inversa de demanda ($P = D(Q)$) se tiene que $IT = D(Q)Q$, de donde

$$IMg = \frac{\Delta IT}{\Delta Q}.$$

En términos geométricos, el ingreso marginal representa la pendiente del ingreso total.

Alternativamente, si el monopolista modifica su nivel de producción, el ingreso total cambia en $\Delta IT = P\Delta Q + Q\Delta P$. Dividiendo ambos lados de esta igualdad por ΔQ, obtenemos una expresión alternativa para el ingreso marginal.

$$IMg(Q) = \Delta IT/\Delta Q = P + Q(\Delta P/\Delta Q) \qquad [1]$$

donde el último término es negativo, ya que $\Delta P/\Delta Q < 0$, a menos que $Q = 0$ cuando $IMg = P$. Por tanto, $IMg(Q) < P$ cuando $Q > 0$.

Igualmente, multiplicando el lado derecho de la ecuación [1] por P/P y reordenando esta expresión obtenemos

$$IMg(Q) = P\left(1 + \frac{Q}{P}\frac{\Delta P}{\Delta Q}\right) \qquad [2]$$

Es decir, el ingreso marginal puede expresarse como función de la elasticidad precio de la demanda:

$$IMg(Q) = P\left(1 + \frac{1}{E_p}\right) \qquad [3]$$

Utilizando la ecuación [3] se puede calcular el ingreso marginal en cada punto de la función de demanda, partiendo del precio y de la elasticidad precio de la demanda en dicho punto. A partir de esta expresión se puede concluir que el ingreso marginal es positivo (negativo) cuando la demanda es precio-elástica (precio-inelástica), $E_p < -1$ $(-1 < E_p < 0)$. Por tanto, el monopolista sólo producirá en el tramo elástico de su función de demanda.

Para calcular cuál es el precio y la cantidad de equilibrio de monopolio se maximiza la expresión del beneficio total a largo plazo de un monopolista ($\pi(Q)$), que es igual al ingreso total ($D(Q)Q$) menos el coste total a largo plazo ($C_L(Q)$). Es decir,

$$\pi(Q) = D(Q)Q - C_L(Q) \qquad [4]$$

Maximizando la ecuación [4] respecto a Q, se obtiene que el monopolista **maximiza beneficios cuando el ingreso marginal es igual al coste marginal** a largo plazo ($IMg\ (Q) = CMg_L(Q)$). La condición de maximización de beneficios, puede reescribirse sustituyendo el ingreso marginal por su correspondiente expresión en [3].

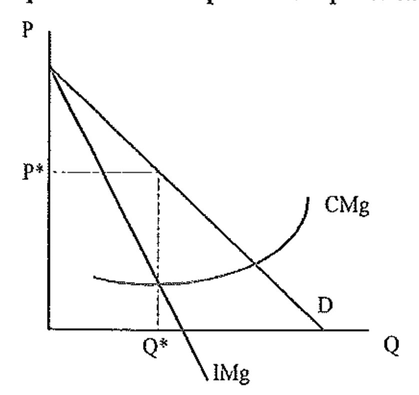
$$P\left[1+\left(1/E_p\right)\right] = CMg_L(Q) \qquad [5]$$

Al dividir ambos lados de la ecuación [5] por $CMg_L(Q)$, ésta puede reformularse como

$$\frac{P}{CMg_L} = \frac{1}{1+\left(1/E_p\right)} \qquad [6]$$

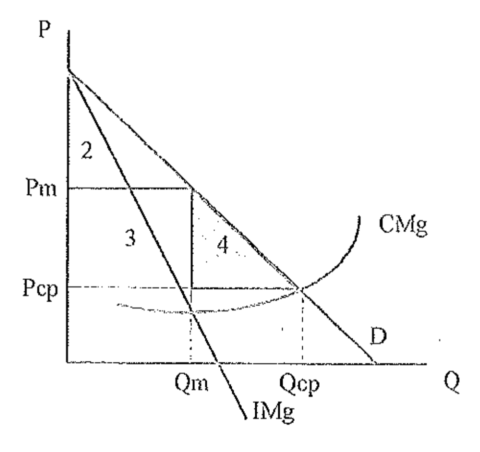
Por tanto, la condición de maximización de beneficios representada en la ecuación [6], implica que la ratio entre el precio de monopolio y el coste marginal depende inversamente de la elasticidad precio de la demanda (correspondiente al precio maximizador del beneficio).

Equilibrio de la empresa monopolística



Si se compara el equilibrio del monopolio con el de competencia perfecta, suponiendo que los costes marginales del monopolista son iguales a los de competencia perfecta, se puede concluir que el **precio de monopolio es superior al de competencia perfecta**, mientras que la **cantidad producida es inferior**.

Comparación entre competencia perfecta y monopolio



La pérdida de excedente cuando se pasa de la situación de competencia a monopolio es la suma de las áreas 3+4 de la figura. Como el excedente del productor aumenta en 3, la pérdida de excedente que no va a ningún otro agente, llamado **coste social del monopolio** es 4.

La discriminación de precios

La discriminación de precios consiste en que un productor precio-oferente cobra diferentes precios por el mismo producto, apropiándose del excedente del consumidor, para incrementar el beneficio de su empresa. Se distinguen tres tipos de discriminación:

1. **Discriminación de precios de primer grado o perfecta**: La empresa se apropia de todo el excedente del consumidor, para lo cual necesita tener información perfecta de las valoraciones marginales del consumidor. Esta circunstancia dificulta su aplicación en la práctica. El precio que fija la empresa es igual al valor marginal cada unidad.
2. **Discriminación de precios de segundo grado**: Es una versión limitada de la anterior en donde se fijan los precios por tramos en función de las cantidades consumidas por el cliente.

3. **Discriminación de precios de tercer grado**: La empresa carece de información sobre las funciones de demanda individuales pero sabe identificar diferentes grupos de consumidores en función de alguna característica estableciendo posteriormente precios diferentes. Las características más utilizadas son: Tiempo, Edad, Renta, Información.

Si el monopolista vende en dos mercados diferentes, el ingreso total alcanza un máximo cuando los ingresos marginales en los dos mercados son iguales, por lo que el cociente de precios que maximiza el beneficio en función de las elasticidades es:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1E_2 + E_1}{E_1E_2 + E_2}$$

Lo que implica que el precio que maximiza beneficios es más bajo en el mercado con función de demanda más elástica.

Para obtener el precio y el volumen de producción óptimo se iguala el coste marginal al ingreso marginal en cada mercado:

$$IMg_1(Q_1) = CMg(Q_1 + Q_2)$$

$$IMg_2(Q_2) = CMg(Q_1 + Q_2)$$

Cuando los mercados no están del todo separados puede surgir la figura del **arbitrajista**, el cual, es un intermediario que compra en el mercado que tiene un precio más barato y vende en el que tiene un precio más caro, con lo que no puede mantenerse la discriminación de precios.

Una **tarifa en dos partes** es una forma de acaparar el excedente del consumidor consistente en que los consumidores paguen una cuota fija que les da derecho a comprar las unidades del bien que deseen a un precio fijo. El productor maximiza beneficios si fija una cuota igual al excedente del consumidor y un precio por unidad igual al coste marginal de producción.

TEST

1. Un monopolista asigna Q unidades en dos mercados (mercado uno y mercado dos) en donde E_1= -4 y E_2= -5; ¿En cuál de los dos mercados será el precio más bajo?

a) El precio en ambos mercados es el mismo.

b) El precio en el mercado uno es mayor que en el mercado dos.

c) El precio en el mercado dos es mayor que en el mercado uno.

d) Todas las respuestas son incorrectas.

2. La UE ha impuesto una importante multa a una empresa alemana de automóviles por impedir que los concesionarios de su marca en un país vendieran coches a los ciudadanos de otro país, es decir:

a) La empresa aplicaba una discriminación de primer grado.

b) La empresa aplicaba una discriminación de tercer grado que beneficiaba a los consumidores.

c) La empresa aplicaba una discriminación de tercer grado que era contraria a la libre circulación de mercancías en la UE.

d) La empresa aplicaba una discriminación de segundo grado.

3. Una empresa de software que actúa como monopolista de sus programas informáticos debe fijar los precios en dos mercados. El mercado uno está compuesto por las empresas y el Estado, el mercado dos está compuesto por estudiantes. La empresa sabe que existe el riesgo de piratería en el mercado dos si el precio es excesivamente elevado. La elasticidad en el mercado uno es -1 y en el mercado dos es -4, entonces:

a) Aplicará el mismo precio en ambos mercados.

b) Aplicará un precio más bajo en el mercado uno.

c) Fijará un precio más bajo en el mercado dos.

d) Con esta información, no podemos afirmar nada sobre su política de precios óptima.

4. El arbitraje:

a) Favorece la aplicación de la discriminación de precios de tercer grado.

b) Aparece solamente cuando aplicamos una discriminación perfecta o de primer orden.

c) Impide el mantenimiento de la discriminación de precios realizada por una empresa.

d) Favorece la discriminación a través de una tarifa en dos partes.

5. Suponga un monopolista puro que está produciendo en un punto donde $E = -3$, si el coste marginal es constante e igual a 10, el precio al que vende el producto es igual a:

a) 15.

b) 25.

c) 30.

d) No es posible calcular el precio sin conocer la curva de demanda.

6. Un monopolista cuya función de costes totales es $CT = 4x^2 - 2x$ se enfrenta a una curva inversa de demanda $P = 12 - 3x$. La cantidad y el precio de equilibrio son:

a) $x = 1$ y $P = 8$.

b) $x = 1$ y $P = 9$.

c) $x = 5$ y $P = 2$.

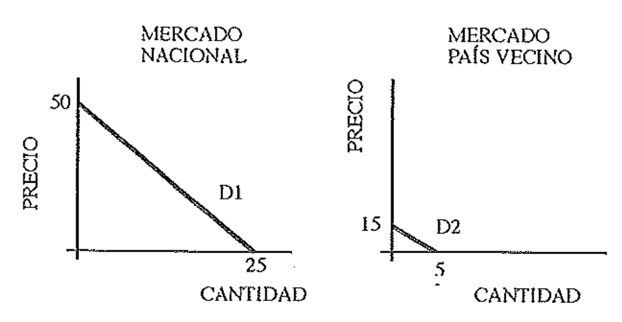
d) $x = 7$ y $P = 1$.

Solución

1. b	2. c	3. c	4. c	5. a	6. b

Ejercicios resueltos

1. Una empresa monopolista vende un producto en dos mercados diferentes: Mercado nacional y mercado del país vecino. El Coste Marginal es constante e igual a 25 u.m. Las funciones de demanda vienen representadas por las siguientes gráficas.



Conteste a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál sería el precio en cada mercado?

b) ¿Cuál sería la cantidad total vendida?

c) Si la empresa opta por una tarifa en dos partes, ¿Cuál será la cuota de entrada máxima que podría cobrar?

d) Conteste a las anteriores preguntas si el Coste Marginal es ahora constante e igual a cero.

Solución:

a) El equilibrio se obtiene igualando el coste marginal al ingreso marginal en cada mercado.

En el mercado nacional:

$P_n = 50 - 2Q_n$ por lo que $IMg = 50 - 4Q_n$

Utilizando la condición de máximo beneficio $CMg = IMg$

$50 - 4Q_n = 25$

de donde $Q_n^* = 6{,}25$ que sustituido en la función de demanda permite obtener el precio $P_n^* = 37{,}5$.

En el mercado del país vecino:

No se produce ninguna cantidad ya que no existe demanda cuando el coste marginal es 25.

b) La cantidad total vendida es la del mercado nacional ya que en el país vecino no se vende ninguna unidad, Q total= 6,25.

c) La cuota corresponde con el excedente del consumidor. Como sólo produce en el mercado nacional la cuota para dicho mercado es:

$$Cuota = \frac{6{,}25\ (12{,}5)}{2} = 39{,}06$$

d) Si el coste marginal es igual a 0:

En el mercado nacional

$P_n = 50 - 2Q_n$ por lo que $IMg = 50 - 4Q_n$

Utilizando la condición de máximo beneficio $CMg = IMg$

$50 - 4Q_n = 0$

de donde $Q_n^* = 12{,}5$ que sustituido en la función de demanda permite obtener el precio $P_n^* = 25$.

En el mercado del país vecino:

$P_{pv} = 15 - 3Q_{pv}$ por lo que $IMg = 15 - 6Q_{pv}$

Utilizando la condición de máximo beneficio $CMg = IMg$

$15 - 6Q_{pv} = 0$

de donde $Q_{pv}{}^* = 2{,}5$ que sustituido en la función de demanda permite obtener el precio $P_{pv}{}^* = 7{,}5$

La cuota máxima correspondiente a cada país es el excedente del consumidor en cada caso, es decir,

$$Cuota\ nacional = \frac{25(12{,}5)}{2} = 156{,}25$$

$$Cuota\ país\ vecino = \frac{7{,}5(2{,}5)}{2} = 9{,}38$$

2. Un monopolista asigna Q unidades de tal forma que el ingreso marginal sea el mismo en ambos mercados, ¿cómo será el precio en el mercado 1 en comparación al precio del mercado 2 si en ambos mercados la elasticidad es igual?

Solución:

Si $E_1 = E_2$ entonces

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1E_2 + E_1}{E_1E_2 + E_2} = 1$$

lo que significa que el precio será el mismo en ambos mercados.

3. La industria farmacéutica que fabrica un líquido de limpieza de lentes de contacto llega a un acuerdo para vender su producto exclusivamente en envases de 150 ml. La demanda viene representada por $P = 90 - Q$ donde P es el precio y Q la cantidad expresada en mililitros. El coste marginal es constante e igual a 60 u.m.

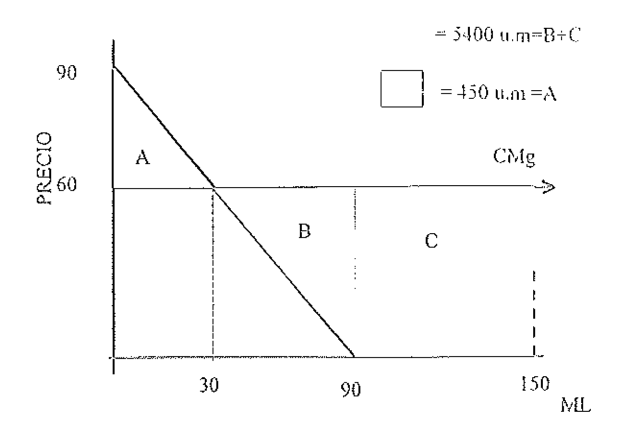
Bajo estas condiciones,

a) ¿qué cantidad del bien se consumirá en este mercado?

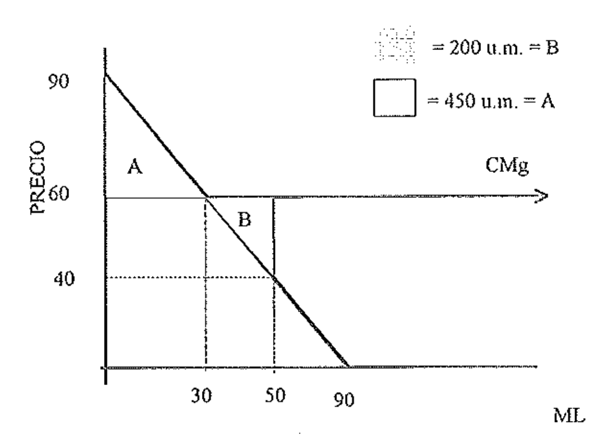
b) La industria acuerda vender ahora su producto exclusivamente en un envase de 50 ml. ¿qué cantidad se consumirá en este caso?

Solución:

a) Si realizamos un análisis gráfico, el consumidor maximiza su excedente comprando 30 ml. Sin embargo, le obligan a comprar un envase de 150 ml. Bajo estas condiciones, comprobamos que el excedente que obtiene el consumidor es menor que el perjuicio que le ocasiona la compra del envase de 150 ml, por tanto, el consumidor decide no consumir ninguna cantidad.



b) Realizando nuevamente el análisis gráfico y calculando los valores del excedente y el daño ocasionado por obligarle a comprar el nuevo envase de 50 ml, comprobamos que se sigue beneficiando en términos del excedente del consumidor ya que la empresa se apropia de 200 u.m. pero el consumidor tiene un excedente de 450 u.m. por lo que en términos netos su excedente es 250 u.m. Por tanto, acaba comprando, en este caso, el envase de 50 ml.



4. Considere un monopolista con unos costes totales $CT = 20x^2 - 10x$ que se enfrenta a una curva de demanda $P = 200 - 40x$.

a) Suponga que se trata de un monopolista puro. Calcule la cantidad y el precio de equilibrio, el excedente del consumidor y el beneficio del monopolio.

b) Si el monopolista impone una tarifa en dos partes. Calcule la cantidad, el precio de equilibrio, el excedente del consumidor y el beneficio del monopolio.

c) Imagine que el monopolista puede actuar en dos mercados distintos. En el primero actúa como monopolista con precio único y se enfrenta a la siguiente curva de demanda $P_1 = 200 - 40x_1$. En el segundo mercado actúa en régimen de competencia perfecta y el precio al que vende es $P = 70$. Calcule la cantidad y el precio al que vende en cada mercado.

Solución:

a) A partir de la función de coste total, obtenemos el coste marginal:

$$CMg = \frac{dCT}{dx} = 40x - 10$$

El ingreso total es $IT = 200x - 40x^2$, por lo que el ingreso marginal es $IMg = 200 - 80x$.

La condición del máximo beneficio es $CMg = IMg$:

$40x - 10 = 200 - 80x$ de donde $x^* = 1{,}75$, por lo que a partir de la demanda se puede calcular el precio:

$P^* = 200 - 40(1{,}75) = 130$

El excedente del consumidor es

$$\text{Excedente del consumidor} = \frac{(200-130)1{,}75}{2} = 61{,}25$$

El beneficio se calcula como:

$\pi(x) = IT - CT = 1{,}75(130) - 20(1.75)^2 + 10(1{,}75) = 183{,}75$

b) Si el monopolista impone una tarifa en dos partes, cobra un precio por unidad resultante de igualar $P = CMg$ y como cuota el excedente del consumidor.

Por lo tanto: $40x - 10 = 200 - 40x$ de donde $x^* = 2{,}625$ y $P^* = 95$.

La cuota es:

$$\text{Cuota} = \frac{(200-95)2{,}625}{2} = 137{,}81$$

El excedente del consumidor es cero ya que el monopolista cobra como cuota todo el excedente.

El beneficio del monopolista es:

$\pi(x) = IT - CT + cuota = 2{,}625(95) - 20(2{,}625)^2 + 10(2{,}625) + 137,81 = 275{,}62$

c) La cantidad total que vende el monopolista, x, se reparte entre lo que vende en cada mercado, x_1 y x_2.

Cuando actúa como monopolista maximiza beneficios produciendo cuando $CMg = IMg_1$

Como $CMg = 40x - 10$ e $IMg = 200 - 80x_1$, igualando los dos se tiene:

$200 - 80x_1 = 40x - 10$ (1)

Si el empresario produce en competencia perfecta, maximiza beneficios cuando $P = CMg$, es decir

$40x - 10 = 70$ por lo que $x = 2$

que sustituido en (1) permite obtener la cantidad x_1:

$200 - 80x_1 = 40(2) - 10$

de donde

$x_1 = 1{,}625$

por lo que $x_2 = 2 - 1{,}625 = 0{,}375$

Finalmente, el precio cuando produce en competencia perfecta es $P_2 = 70$ y el precio cuando produce como un monopolista es $P_1 = 200 - 40(1{,}625) = 135$.

Problemas propuestos

1. Una empresa monopolista cuya función de costes variables es $CV = 2x^3 - 10x^2 + 50x$ se enfrenta a una función de demanda $x = 48 - P$. Se pide obtener el precio y la cantidad para los que la empresa maximiza beneficios.

Solución

$P = 45{,}12$ y $x = 2{,}88$.

2. Una empresa que fabrica un producto tiene la siguiente función de costes totales:

$CT = 2x^2 + 8x + 30$

Hallar el precio y la cantidad que obtiene la empresa en situación de equilibrio en cada uno de los siguientes casos:

a) La empresa actúa en régimen de monopolio y se enfrenta a la siguiente función de demanda:

$x = 60 - 2p$

b) La empresa vende sus productos en dos mercados distintos. En el primero actúa como monopolista, siendo la función de demanda del producto:

$x_1 = 60 - 2p_1$

y en el segundo actúa en régimen de competencia perfecta y el precio que alcanza el producto que fabrica es $p_2 = 27$.

c) La empresa actúa como monopolista en dos mercados diferentes, siendo las funciones de demanda de cada uno de ellos:

$x_1 = 60 - 2p_1$

$$x_2 = 48 - \frac{3}{2}p_2$$

Solución:

a) $x = 4{,}4$ y $p = 27{,}8$.

b) $x_1 = 3$ y $x_2 = 1{,}75$, mientras que $P_1 = 28{,}5$ y $P_2 = 27$.

c) $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$, mientras que $P_1 = 29$ y $P_2 = 30$.

Capítulo 10
La fijación de precios en el oligopolio

CONCEPTOS CLAVE

En este capítulo se estudia la cooperación entre empresas para limitar la competencia. A través de la cooperación, las empresas pretenden mantener un precio por encima del precio de competencia, reducir el volumen de producción de la industria, e incrementar su beneficio.

Es fácilmente demostrable que las empresas competitivas pueden beneficiarse si cooperan entre sí. El comportamiento cooperativo (colusión) se puede dar tanto en mercados competitivos de empresas precio-aceptantes (cártel), como en mercados con pocas empresas (oligopolio).

Un **cártel** es un acuerdo entre empresas precio-aceptantes cuyo propósito es eludir la competencia reduciendo el volumen de producción y, de este modo, elevar tanto el precio como el beneficio de cada uno de sus miembros. Para que el cártel tenga éxito debe ser capaz de limitar la entrada de nuevas empresas.

Para determinar el volumen de producción y el precio, el cártel se comporta como un monopolista igualando su ingreso marginal (*IMg*) al coste marginal (*CMg*). De este modo, el cártel fija un volumen de producción y un precio iguales a los de monopolio. Posteriormente, el nivel de producción del cártel se reparte entre cada una de sus empresas. El principal problema del cártel es que lo que resulta beneficioso para el cártel en su conjunto no lo es para cada uno de sus miembros, ya que cada uno de ellos tendrá incentivos para incrementar su producción mientras el precio esté por encima del coste marginal a corto plazo. Esta situación, hace que los cárteles sean estructuras especialmente frágiles.

Dado que el precio (y, por tanto, el beneficio) más alto es el de monopolio, dos empresas tendrán fuertes incentivos a cooperar para producir justo en la situación que correspondería a un monopolio. Cuando dos empresas cooperan para fijar el precio y la cantidad de monopolio y, posteriormente, repartirse el beneficio obtenido, hablamos de un **duopolio.**

No obstante, en un duopolio, cada una de las empresas tendrá incentivos a incumplir engañosamente los acuerdos. Esta situación también será extensible a un

oligopolio. Cuanto mayor sea el número de empresas que constituyen el oligopolio, mayor será el incentivo de cada una de ellas a romper los acuerdos alcanzados.

Cuando en un mercado existe un número pequeño de empresas y éstas no cooperan entre sí, sino que por el contrario compiten, podemos encontrarnos con varias situaciones:

Duopolio de Cournot. Cuando en un modelo de comportamiento no cooperativo las empresas compiten en cantidades nos hallamos ante el modelo de duopolio de Cournot. En este modelo, tenemos dos empresas que venden un producto idéntico y tienen la misma función de coste total con un coste marginal constante. Las dos empresas deciden qué cantidad producir de forma independiente pero simultánea.

Modelo de Bertrand. En el duopolio de Bertrand las empresas no compiten en cantidades, sino en precios. Las empresas anuncian sus precios de forma independiente. El vendedor que ofrece un precio más bajo acapara todo el mercado, ya que los consumidores pueden cambiar de un vendedor a otro sin incurrir en coste alguno. En el caso de fijar el mismo precio, se reparten el mercado.

Lo que diferencia el modelo de Bertrand del modelo de Cournot es que en el primero la función de demanda de la empresa es horizontal al precio cargado por su rival. En el modelo de Bertrand, la empresa que fije un precio inferior capta todo el mercado. En este modelo, el equilibrio de Nash es aquél en el que cada empresa elige el precio que maximiza su beneficio dado el precio de su rival. Esto hará que la solución no cooperativa conduzca al precio y la cantidad de competencia perfecta ($P=CMg$).

Equilibrio de Nash. En un juego de n jugadores representado en forma normal $G=[s_1,s_2,\ldots,s_n;\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n]$, donde s_i $(i=1,\ldots,n)$ son las estrategias de los n jugadores y π_i $(i=1,\ldots,n)$ son los beneficios, las estrategias $(s_1^*,s_2^*,\ldots,s_n^*)$ son un equilibrio de Nash si, para cada jugador i, s_i^* es la *mejor respuesta* a las estrategias del resto (n-1) de los jugadores $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$, de forma que

$$\pi_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)\geq\pi_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$$

Es decir, s_i^* resuelve el problema $\underset{s_i\in S_i}{Max}\quad \pi_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$

Si la teoría ofrece las estrategias $(s_1',s_2',\ldots,s_n')$ como solución, pero estas estrategias no son un equilibrio de Nash, entonces al menos un jugador tendrá incentivos para desviarse de las predicciones resultantes del desarrollo del juego. Es decir, bajo un equilibrio de Nash, ningún agente tendrá incentivos a desviarse del mismo, ya que los beneficios que obtendría serían menores.

TEST

1. ¿En cuál de los siguientes casos el nivel de precios de equilibrio es inferior?

a) competencia perfecta

b) duopolio de Cournot

c) cártel

d) monopolio de precio único

2. Un equilibrio de Nash se caracteriza por

a) ser una situación en la que ningún agente que se halle en el citado equilibrio tendrá incentivos para desviarse del mismo

b) ser una situación en la que cada jugador juega su mejor respuesta ante las estrategias jugadas por el resto de los agentes participantes del juego

c) ser el equilibrio correspondiente a un juego que se resuelve de forma no-cooperativa

d) todas las respuestas son correctas

3. El modelo de duopolio de Cournot representa el caso de dos empresas

a) que cooperan para alcanzar una situación idéntica a la de monopolio

b) que no cooperan y compiten en precios

c) que no cooperan y compiten en cantidades

d) que cooperan para alcanzar una situación idéntica a la de competencia perfecta

4. En un modelo de competidores de Bertrand, si la demanda viene dada por la ecuación $P=100-2(q_1+q_2)$ y la empresa 1 establece un precio $P_1=20$ y la empresa 2 un precio $P_2=25$. En este caso:

a) La empresa 1 venderá 40 unidades y la empresa 2, no venderá ninguna unidad.

b) Tanto la empresa 1 como la 2 venderán 20 unidades cada una.

c) La empresa 1 no venderá ninguna unidad y la empresa 2 venderá 40 unidades.

d) La empresa 1 no venderá ninguna unidad y la empresa 2 venderá 37,5 unidades.

5. Señale la respuesta correcta

a) en el modelo de Bertrand la función de demanda de la empresa tiene pendiente negativa

b) en el modelo de Bertrand la función de demanda de la empresa es horizontal al precio cargado por su rival

c) en el modelo de Cournot con un ligero recorte de precios una empresa puede captar todo el mercado

d) en el modelo de Cournot las empresas compiten en precios, mientras que en el modelo de Bertrand compiten en cantidades

Solución:

1. a	2. d	3. c	4. a	5. b

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Suponga un juego con dos jugadores, A y B. El jugador A escribe en un papel ARRIBA o ABAJO. Al mismo tiempo el jugador B escribe IZQUIERDA o DERECHA. Una vez hecho esto se examinan los papeles y cada uno de ellos obtiene el resultado que muestra la siguiente matriz:

		JUGADOR B	
		IZQUIERDA	DERECHA
JUGADOR A	ARRIBA	2, 1	0, 0
	ABAJO	0, 0	1, 2

¿Existe algún equilibrio de Nash?

Solución:

Si el jugador A elige ARRIBA, lo mejor que puede hacer el jugador B es elegir IZQUIERDA. Y si el jugador B elige IZQUIERDA, lo mejor que puede hacer el jugador A es elegir ARRIBA. Por tanto, el par de estrategias (ARRIBA, IZQUIERDA) es un equilibrio de Nash.

Otro equilibrio de Nash para este juego es el par de estrategias (ABAJO, DERECHA). El procedimiento para obtenerlo es el mismo.

2. Dos duopolistas producen dos bienes sustitutivos con las funciones de costes respectivas:

$CT_1 = 4q_1$

$CT_2 = q_2$

La empresa 1 abastece un mercado con la siguiente función de demanda, expresada de forma inversa

$p_1 = 10 - 2q_1 - q_2$

La empresa 2 abastece otro mercado con la función de demanda, expresada también en forma inversa

$p_2 = 8 - q_1 - 2q_2$

a) Obtenga la solución de equilibrio de Cournot y calcule el beneficio de cada empresa correspondiente a dicha solución.

b) Obtenga la solución de equilibrio suponiendo que las empresas realizan el acuerdo de maximizar el beneficio conjunto y compare dicho beneficio con el obtenido en el apartado anterior.

Solución:

a) En el modelo de duopolio de Cournot las empresas se sitúan sobre sus funciones de reacción, que se obtienen de la siguiente forma:

<u>Función de reacción de la empresa 1</u> (R_1):

$$\underset{q_1}{\text{Maximizar}}\ \pi_1(q_1,q_2) = p_1q_1 - C_1(q_1) = (10 - 2q_1 - q_2)q_1 - 4q_1$$

La condición de primer orden de este problema de maximización es

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = (10 - 2q_1 - q_2) - 2q_1 - 4 = 0$$

de donde se obtiene

$$q_2 = 6 - 4q_1 \qquad q_1 = \frac{6 - q_2}{4}$$

que es la función de reacción de la empresa 1.

<u>Función de reacción de la empresa 2</u> (R_2):

$$\underset{q_2}{\text{Maximizar}}\ \pi_2(q_1,q_2) = p_2q_2 - C_2(q_2) = (8 - q_1 - 2q_2)q_2 - q_2$$

Nuevamente, la condición de primer orden es

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = (8 - q_1 - 2q_2) - 2q_2 - 1 = 0$$

de donde se obtiene

$$q_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}q_1$$

que es la función de reacción de la empresa 2.

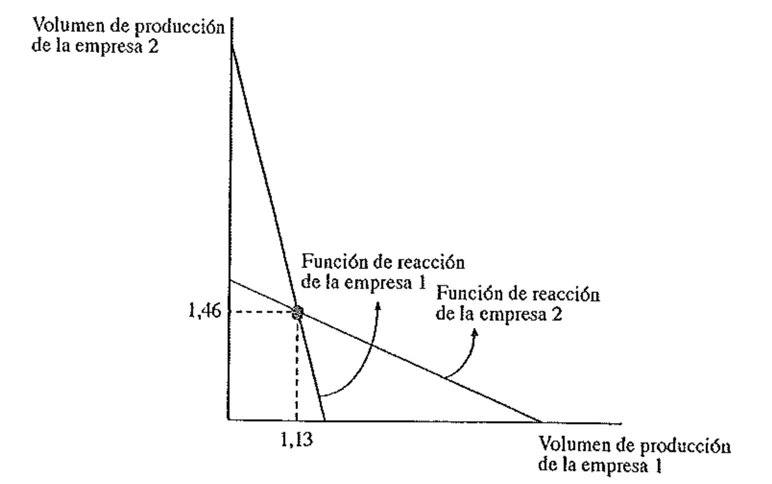
El equilibrio de Nash de este juego no cooperativo se obtiene igualando las funciones de reacción de las dos empresas, es decir:

$$6 - 4q_1 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}q_1$$

obteniéndose los niveles de producción de equilibrio, $q_1* = 1{,}13$ y $q_2* = 1{,}46$, y los precios de equilibrio $p_1* = 6{,}28$ y $p_2* = 3{,}95$.

Los beneficios de cada empresa correspondientes a la solución de equilibrio son $\pi_1*(q_1*,q_2*) = 2{,}576$ y $\pi_2*(q_1*,q_2*) = 4{,}307$.

Gráficamente:



b) Cuando las empresas realizan el acuerdo de maximización de beneficio conjunto, el problema a resolver es:

Maximizar $\pi(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2) + \pi_2(q_1, q_2) =$
$p_1(q_1, q_2)q_1 - CT_1(q_1) + p_2(q_1, q_2)q_2 - CT_2(q_2)$

siendo $q_1 > 0$ y $q_2 > 0$.

Sustituyendo las funciones de demanda y costes de ambas empresas en la función de beneficios, el problema quedaría de la siguiente forma:

Maximizar $(10 - 2q_1 - q_2)q_1 - 4q_1 + (8 - q_1 - 2q_2)q_2 - q_2 =$
$6q_1 - 2q_1^2 - 2q_1q_2 + 7q_2 - 2q_2^2$

las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 6 - 4q_1 - 2q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = -2q_1 + 7 - 4q_2 = 0$$

de donde se obtienen las soluciones:

$p_1^* = 7{,}001$ $\quad p_2^* = 4{,}501$

$q_1^* = 5/6$ $\quad q_2^* = 4/3$

$\pi_1^* = 2{,}5$ $\quad \pi_2^* = 4{,}655$

comparando los beneficios del cártel con los beneficios conjuntos de Cournot:

$$\pi^{CARTEL} = 2{,}5 + 4{,}655 = 7{,}155$$

$$\pi^{COURNOT} = 2{,}576 + 4{,}307 = 6{,}883$$

Se puede observar que los beneficios del cártel son mayores que los beneficios conjuntos de Cournot, que es precisamente lo que esperábamos obtener.

3. La demanda de mercado de un producto homogéneo viene dada por $Q = 100 - P$. Dos duopolistas producen con la misma función de costes $CT_i(q_i) = 10q_i$.

a) Determinar la solución de Cournot y compararla con la competitiva y la de monopolio.

b) Las dos empresas forman un cártel para maximizar los beneficios conjuntos. ¿Qué precio establecerán y cómo podrían hacerlo efectivo?

c) Finalmente, si las empresas compiten en precios (solución de Bertrand), ¿cuál será el equilibrio del mercado?

Solución:

a) Dadas las funciones de costes totales $CT_1(q_1) = 10q_1$ y $CT_2(q_2) = 10q_2$, se obtienen los costes marginales de ambas empresas $CMg_1(q_1) = 10$ y

$CMg_2(q_2) = 10$. Por otro lado, la función de demanda puede representarse de la siguiente forma:

$P = 100 - (q_1 + q_2)$

Dadas estas expresiones la solución de duopolio de Cournot viene dada por:

Función de reacción de la empresa 1 (R_1):

$$\underset{q_1}{\text{Maximizar}}\ \pi_1(q_1,q_2) = p_1q_1 - C_1(q_1) = (100 - q_1 - q_2)q_1 - 10q_1$$

por tanto, la condición de primer orden es:

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = 90 - 2q_1 - q_2 = 0$$

de donde se obtiene la función de reacción de la empresa 1 (R_1):

$$q_1 = \frac{90 - q_2}{2}$$

Función de reacción de la empresa 2 (R_2):

$$\underset{q_2}{\text{Maximizar}}\ \pi_2(q_1,q_2) = p_2q_2 - C_2(q_2) = (100 - q_1 - q_2)q_2 - 10q_2$$

por tanto, la condición de primer orden es:

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_2} = 90 - q_1 - 2q_2 = 0$$

de donde se obtiene la función de reacción de la empresa 2 (R_2):

$$q_2 = \frac{90 - q_1}{2}$$

El equilibrio de Nash de este juego no cooperativo se obtiene igualando las funciones de reacción de las dos empresas (o sustituyendo una expresión en la otra), es decir

$$q_1 = \frac{90 - \frac{90 - q_1}{2}}{2}$$

despejando q_1, $3q_1 = 90 \to q_1^* = 30$.

Igualmente, considerando la empresa 2, se obtiene $q_2^* = 30$.

Respecto al precio y a los beneficios de equilibrio:

$P^* = 100 - (q_1^* + q_2^*) = 100 - (30 + 30) = 40$

$\pi_1^* = \pi_2^* = 40 \cdot 30 - 10 \cdot 30 = 900$

De este modo, el beneficio total es 1800.

En el caso del monopolio, la solución se obtiene donde el ingreso marginal coincide con el coste marginal, es decir:

$IMg = 100 - 2Q = CMg = 10$

por tanto, la cantidad y el precio de monopolio serán $Q^M = 45$ y $P^M = 100 - 45 = 55$. De este modo, los beneficios son $\pi^M = 45 \cdot 55 - 10 \cdot 55 = 1925$.

Finalmente, en competencia perfecta: $P = CMg \Rightarrow P^c = 10$. Por otro lado, $100 - Q = 10 \Rightarrow Q^c = 90$.

El cuadro comparativo de las soluciones obtenidas es:

	Competencia perfecta	Monopolio	Cournot
q_1			30
q_2			30
$q_1+q_2 = Q$	90	45	60
P	10	55	40
π_1	0		900
π_2	0		900
$\pi = \pi_1 + \pi_2$	0	1925	1800

b) El cártel implica maximizar los beneficios conjuntos

$\Sigma\pi_{i=1,2} = (100 - Q)(q_1 + q_2) - 10q_1 - 10q_2 = (100 - Q)Q - 10Q$

En este caso de empresas "simétricas" (iguales costes y producto homogéneo), al maximizar los beneficios conjuntos, π_{conj}, se puede determinar la producción global

$$\frac{\partial\pi_{conj}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow Q_{CÁRTEL} = 45$$

Sustituyendo en la función de demanda se obtiene un precio

$P_{CÁRTEL} = 100 - 45 = 55$

En este caso, las dos empresas actúan como si fueran un monopolio. Al precio P=55 es necesario "limitar" la producción global a Q=45, para lo cual puede utilizarse un sistema de cuotas: con empresas idénticas en costes, una distribución en partes iguales, $q_1 = q_2 = Q/2 = 22{,}5$ es "razonable", pero no más o menos eficiente que cualquier otra que verifique $q_1 + q_2 = 45$.

c) Si la competencia es en precios, el equilibrio viene dado por la relación $P=CMg$. Por tanto, la solución sería la de competencia perfecta.

Problemas propuestos

1. La demanda de mercado de un producto homogéneo viene dada por $P = 20 - Q$. Dos duopolistas producen con la misma función de costes $CT(q_i) = 2q_i$

a) Determinar la solución de Cournot y compararla con la competitiva y la de monopolio.

b) Las dos empresas forman un cártel para maximizar los beneficios conjuntos. ¿Qué precio establecerán y cómo podrían hacerlo efectivo?

Solución:

	Competencia perfecta	Monopolio	Cournot	Cártel
q_1			6	
q_2			6	
$q_1+q_2=Q$	18	9	12	9
P	2	11	8	11
π_1	0		36	
π_2	0		36	
$\pi=\pi_1+\pi_2$	0	81	72	81

2. Un mercado presenta una función de demanda $P = 1000 - X$. En él trabajan dos oligopolistas cuyas funciones de costes respectivas son las siguientes:

$CT(q_1) = 10 + 130q_1$

$CT(q_2) = 10 + 170q_2$

Se pide calcular las respectivas funciones de reacción, y la cantidad que cada uno suministra si siguen un modelo de Cournot.

Solución:

Las funciones de reacción son:

$$q_1 = \frac{870 - q_2}{2} \qquad q_2 = \frac{830 - q_1}{2}$$

Resolviendo el sistema queda: $q_1 = 910/3$ y $q_2 = 790/3$.

3. Calcule el precio, la cantidad y los beneficios de tres empresas que actúan en un mercado homogéneo sabiendo que la curva de demanda del bien es:

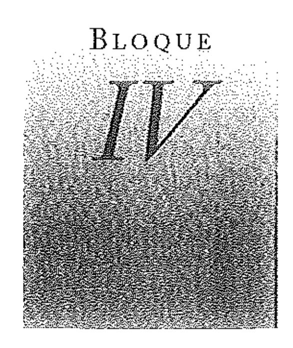
$Q = 46 - P$

y que compiten en cantidades (equilibrio de Cournot). La función de costes es la misma para las tres empresas

$CT_i(q_i) = (18 - 2q_i + q_i^2)$

Solución:

Téngase en cuenta que las tres empresas son iguales y, por tanto, la solución es simétrica. De este modo, $q_i = 8$, por lo que Q=24 y P=46-24=22. El beneficio de cada empresa es igual a 110.



Ampliaciones

Capítulo 11: El consumo intertemporal • Capítulo 12: Teoría del equilibrio general paretiano

Capítulo 11
El consumo intertemporal

CONCEPTOS CLAVE

El **valor actual** de una corriente de renta es igual a

$$\text{Valor actual} = R_1 + \frac{R_2}{1+i} + \frac{R_3}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^{n-1}}$$

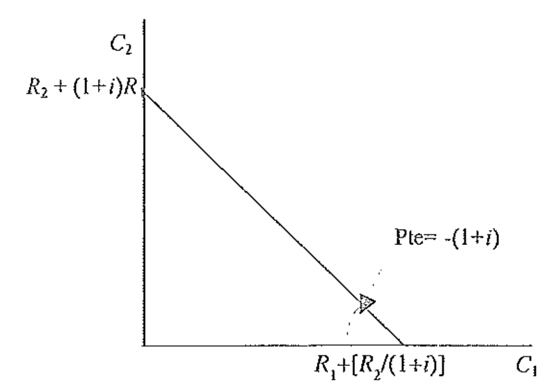
La **restricción presupuestaria intertemporal** es

$C_2 = R_2 + (R_1 - C_1) + i(R_1 - C_1)$ o lo que es lo mismo

$C_2 = [R_2 + (1+i)R_1] - (1+i)C_1$

De donde se deduce que la pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal es, por tanto, $-(1 + i)$.

La representación gráfica de la restricción presupuestaria intertemporal es:



El mapa de **preferencias intertemporales** describe las posibilidades de intercambio intertemporal del consumidor, de modo que la utilidad depende del gasto de consumo del bien compuesto de cada año.

$U = U(C_1,C_2)$

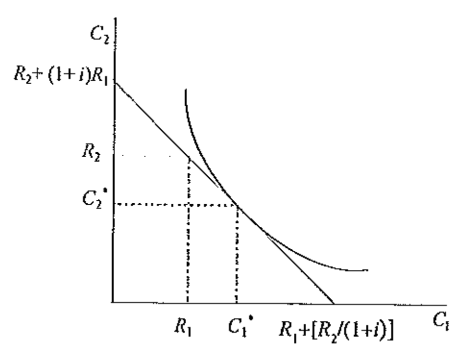
La **Relación Marginal de Sustitución Intertemporal** muestra la tasa a la que el consumidor está dispuesto a sustituir el consumo presente por el consumo futuro manteniendo la utilidad constante.

$$RMSI = \left.\frac{\Delta C_2}{\Delta C_1}\right|_{U=U_0}$$

El **equilibrio de consumidor** se encuentra en el punto en el cual la relación marginal de sustitución intertemporal y la pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal son iguales.

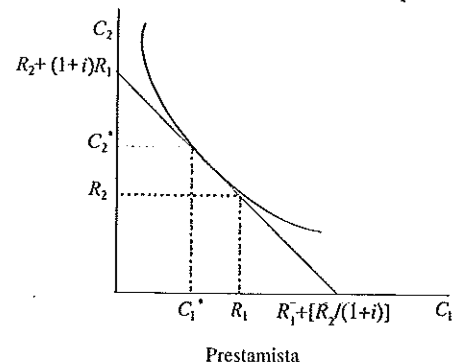
$$RMSI = -(1+i)$$

Si el individuo consume una cesta en el período presente mayor que la dotación de dicho período, el individuo debe pedir prestado. Gráficamente:



Prestatario

Por el contrario, si el individuo consume una cesta en el período presente menor que la dotación de dicho período, el individuo es un prestamista. Gráficamente:



Prestamista

Si C_1 y C_2 son bienes normales, un incremento en la renta futura, manteniendo constante la renta presente, reduce la cantidad ahorrada por el consumidor.

Si C_1 y C_2 son bienes normales, un incremento en la renta presente, manteniendo constante la renta futura, aumenta la cantidad ahorrada por el consumidor.

TEST

1. La corriente de rentas que va a percibir un individuo es de 100 u.m. durante los períodos de tiempo: t = 1, 2, 3. Si el tipo de interés de mercado es constante e igual al 3%, el valor actual (en t = 1) de dicha corriente de rentas será :

a) 294,174

b) 291,347

c) 300

d) 197,087

2. Suponga un individuo que consume C_1 en el período 1 y C_2 en el período 2, mientras que su renta es m_1 y m_2 en cada período y el tipo de interés es i. Entonces si en el periodo 1 no consume nada, la cantidad máxima que puede consumir en el periodo 2 es:

a) $\frac{C_1}{1+i}$

b) $\frac{m_2}{1+i}$

c) $m_1 + \frac{m_2}{1+i}$

d) $(1+i)m_1 + m_2$

3. En el contexto de un modelo intertemporal, y partiendo de una situación donde el individuo inicialmente estuviese ahorrando, el gobierno decide aplicar un impuesto sobre la renta futura. El efecto de esta política será:

a) un desplazamiento paralelo de la restricción presupuestaria hacia el origen

b) si los bienes de consumo en el período 1 y 2 fuesen normales, disminuirían las cantidades consumidas

c) aumentaría el ahorro del individuo

d) todas las respuestas son correctas

4. Dada la restricción presupuestaria intertemporal de un consumidor se produce un aumento del tipo de interés, en ese caso:

a) aumentará el punto de corte de la restricción presupuestaria con el eje de abscisas

b) la restricción presupuestaria seguirá pasando por el punto de dotaciones de renta girando en el sentido de las agujas del reloj

c) disminuirá el punto de corte de la restricción presupuestaria con el eje de ordenadas

d) la restricción presupuestaria se desplaza paralelamente hacia el origen de coordenadas

5. En un contexto de modelo intertemporal, si aumenta la renta presente:

a) se producirá un desplazamiento paralelo de la restricción presupuestaria hacia la derecha

b) se producirá un desplazamiento de la restricción presupuesaria hacia la derecha, pero la pendiente se modificará

c) se producirá un desplazamiento paralelo de la restricción presupuestaria hacia el origen

d) la restricción presupuestaria no se verá afectada

Soluciones

1. b	2. d	3. d	4. b	5. a

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Un consumidor tiene la siguiente función de utilidad intertemporal: $U(C_1,C_2) = \ln C_1 + \ln C_2$. Si el tipo de interés de mercado es de un 3%, la renta del primer período es de 100 u.m. y la del segundo es de 150 u.m., se pide determinar analíticamente la corriente de consumo óptima del consumidor. Represente gráficamente la solución. ¿Es un prestamista o un prestatario?

Solución

El problema al que se enfrenta el consumidor es el de maximizar su función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\max U(C_1, C_2) = \ln C_1 + \ln C_2$$

$$s.a: \quad C_2 = R_2 + (1+i)(R_1 - C_1)$$

De las condiciones de primer orden de este problema se obtiene:

$$RMSI = -\frac{UMgC_1}{UMgC_2} = -(1+i)$$

Dada la función de utilidad del problema se tiene que las utilidades marginales del consumo de cada período son:

$$UMgC_1 = \frac{1}{C_1} \quad UMgC_2 = \frac{1}{C_2}$$

Por lo que en la situación óptima:

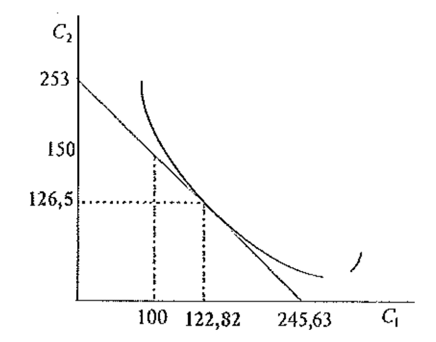
$$-\frac{1/C_1^*}{1/C_2^*} = -(1+0{,}03) \rightarrow \frac{C_2^*}{C_1^*} = 1{,}03 \rightarrow C_2^* = 1{,}03C_1^*$$

Finalmente, sustituimos la expresión anterior en la restricción presupuestaria e incorporamos los datos del enunciado:

$$1{,}03C_1^* = 150 + 1{,}03 \cdot 100 - 1{,}03 \cdot C_1^* \rightarrow 2{,}06C_1^* = 150 + 103 \rightarrow C_1^* = \frac{253}{2{,}06} = 122{,}82$$

Y el consumo en el segundo período será: $C_2^* = 1{,}03 \cdot C_1^* = 126{,}5$. Por tanto, el ahorro del individuo: Ahorro $= R_1 - C_1 = 100 - 122.82 < 0$, es decir, el individuo consume por encima de su renta en el primer período lo que sólo es posible pidiendo prestado, por lo que se trata de un prestatario.

Gráficamente:



La restricción presupuestaria intertemporal es: $C_2 = 150 + 1{,}03(100 - C_1)$, de donde se tiene que: $C_2 = 253 - 1{,}03C_1$, y corta en los ejes en: (0,253) y (245,63,0).

2. Suponga que un consumidor vive dos años y puede elegir entre las siguientes alternativas:

Alternativa A: cobrar en el primer año 1.500.000 ptas y en el segundo 1.400.000 ptas.

Alternativa B: cobrar en el primer año 1.300.000 ptas y en el segundo 1.600.000 ptas.

a) Determinar cuál de las opciones elige el consumidor si el tipo de interés es del 5%.

b) ¿Cuál debe ser el tipo de interés para que el consumidor sea indiferente entre ambas opciones?

c) Suponga que el consumidor tiene una función de utilidad dada por la siguiente ecuación: $U(C_1,C_2) = C_1^{2/3} \cdot C_2^{1/3}$ y que el consumidor ha elegido la alternativa A en el apartado a). ¿Cuál es la cantidad que consumiría en cada período y cuál el ahorro?

Solución

a) Calculamos el valor actualizado de las dos opciones para el mismo tipo de interés del 5%:

$$VA(A) = 1.500.000 + \frac{1}{1{,}05}1.400.000 = 2.833.333{,}3$$

$$VA(B) = 1.300.000 + \frac{1}{1{,}05}1.600.000 = 2.823.809{,}5$$

Puesto que la alternativa A le proporciona un mayor valor actualizado, será la que elija el consumidor.

b) Si queremos saber cuál debe ser el tipo de interés para que las alternativas fuesen indiferentes entre sí, igualamos sus valores actualizados:

$$1.500.000 + \frac{1.400.000}{1+i} = 1.300.000 + \frac{1.600.000}{1+i} \Rightarrow 200.000 = \frac{200.000}{1+i}$$

$$1 + i = 1 \Rightarrow i = 0$$

Para que fuesen indiferentes, el coste del capital debe ser nulo.

c) Para calcular el punto óptimo de consumo y ahorro del individuo buscamos el punto de tangencia entre la curva de indiferencia más alejada del origen y la restricción presupuestaria intertemporal. Para ello calculamos la pendiente de la curva de indiferencia, como cociente de utilidades marginales, y la pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\frac{(2/3)\cdot C_1^{-(1/3)}\cdot C_2^{1/3}}{(1/3)\cdot C_1^{2/3}\cdot C_2^{-(2/3)}} = 1{,}05 \Rightarrow \frac{2C_2}{C_1} = 1{,}05 \Rightarrow C_2 = 0{,}525\cdot C_1 \quad (1)$$

La restricción presupuestaria intertemporal es:

$C_2 = 1.400.000 + 10{,}5 \cdot (1.500.000 - C_1)$ (2)

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene:

$C_1 = 1.888.888{,}8$

$C_2 = 991.666{,}6$

$S = R_1 - C_1 = -388.888{,}8$

El individuo está desahorrando o pidiendo prestado.

Problemas propuestos

1. Un consumidor tiene la siguiente función de utilidad intertemporal: $U(C_1,C_2) = C_1 \cdot C_2$. Si el tipo de interés de mercado es de un 5%, la renta del primer período es de 50 u.m. y la del segundo es de 31,5 u.m. se pide determinar analíticamente la corriente de consumo óptima del consumidor. Represente gráficamente la solución. ¿Es un prestamista o un prestatario?

Solución:

$C_1^* = 40$, $C_2^* = 42$, $S = 10 \Rightarrow$Individuo prestamista

Capítulo 12
Teoría del equilibrio general paretiano

CONCEPTOS CLAVE

La Teoría del Equilibrio General consiste en estudiar el sistema económico en su conjunto, considerando simultáneamente a los consumidores y a las empresas, de forma que determinamos la demanda, la oferta y los precios al mismo tiempo.

El equilibrio general rompe el enfoque parcial para analizar un equilibrio conjunto en condiciones de estática comparativa. De esta forma formulamos un principio de eficacia en el funcionamiento de la sociedad a través de los criterios de bienestar.

Criterio paretiano:

Es un principio de bienestar que se fundamenta en dos premisas:

a) MEJORA: Una sociedad mejora cuando lo hace el bienestar de algún individuo sin que empeore el de los demás.

b) OPTIMALIDAD: Una situación es óptima en sentido de Pareto cuando no admite mejora.

El criterio de Pareto establece un principio ético que se fundamenta en el individuo, cada consumidor es juez de su bienestar. Además exige la unanimidad de los individuos para su mejora.

Este criterio tiene limitaciones:

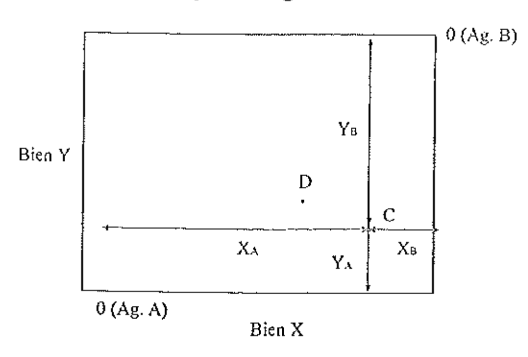
1.- OPTIMALIDAD: No se determina cuál es el mejor estado, sólo si un estado es preferible a otro.

2.- COMPARABILIDAD: Muchos estados no son comparables entre sí.

Por estas razones han surgido posteriormente otros criterios de bienestar como el de KALDOR, HICKS o SCITOVSKY.

El análisis paretiano se realiza gráficamente mediante la Caja de Edgeworth que permite contrastar simultáneamente el bienestar de dos individuos con las dotaciones de dos bienes.

Caja de Edgeworth



Una economía es competitiva si todos los mercados de bienes y factores funcionan en régimen de competencia perfecta. Los factores productivos están dados $(\overline{K}, \overline{L})$, las funciones de producción, para cada bien, son: $x = f_1(L,K)$ e $y = f_2(L,K)$ y las funciones de utilidad son: $U_A = U_A(x,y)$ y $U_B = U_B(x,y)$.

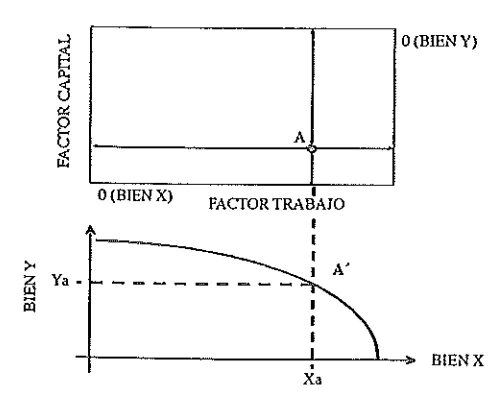
Suponemos dos únicos factores, dos bienes y dos consumidores, en el contexto restrictivo de competencia perfecta podemos obtener las condiciones de bienestar de la sociedad, alcanzando un estado óptimo de producción y distribución. Las condiciones son:

1) Que haya eficiencia o equilibrio en la utilización de los factores productivos:

$RMST_L^K(x) = RMST_L^K(y)$

Gráficamente, supone estar situados en algún punto de la curva de posibilidades de producción o frontera de transformación.

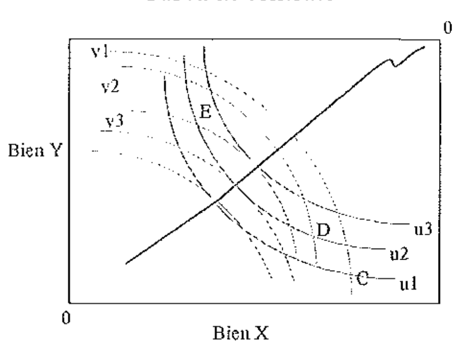
Caja de Edgeworth de producción



2) Que exista equilibrio en la distribución de bienes o eficiencia en el consumo:

$RMS_x^y(A) = RMS_x^y(B)$

Curva de contrato



Gráficamente, debemos estar en algún punto de la curva de contrato de la distribución.

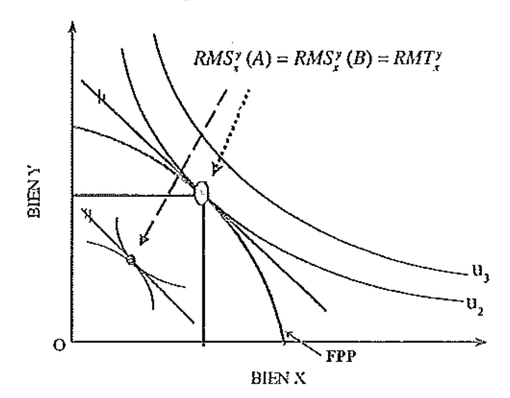
3) Que haya eficiencia en la composición del producto: la cantidad de productos ha de corresponder con lo que los consumidores desean:

$RMS_x^y(A) = RMS_x^y(B) = RMT_x^y$

Gráficamente, estaremos en un punto de tangencia entre la curva de posibilidades de producción y la curva de indiferencia social.

El cumplimiento de esta tercera condición es suficiente para estar en una situación de óptimo paretiano de distribución y producción.

Óptimo de Pareto



TEST

1. Un estado es óptimo en el sentido de Pareto si:

a) Admite mejora sin empeorar al resto de los individuos.

b) No admite mejora sin empeorar al resto de los individuos.

c) Es comparable a los demás estados.

d) No es comparable a los demás estados.

2. La condición necesaria y suficiente de Óptimo General de Pareto es:

a) $RMS_x^y(A) = RMS_x^y(B)$.

b) $RMST_x = RMST_y$.

c) $RMST = RMT$.

d) $RMS_x^y(A) = RMS_x^y(B) = RMT_x^y$.

3. Que la relación de precios Px/Py sea igual a la RMT pero mayor que la RMS, implica:

a) Que existe equilibrio en el intercambio.

b) Que existe equilibrio en la producción.

c) Que existe equilibrio General en sentido de Pareto.

d) Que no hay equilibrio en la producción.

4. Señale cuál de estas afirmaciones no es correcta.

a) La eficiencia de Pareto en el intercambio exige que las relaciones marginales de sustitución de todos los consumidores sean iguales.

b) La eficiencia de Pareto en la producción exige que todas las relaciones marginales de sustitución técnica sean iguales para todas las empresas.

c) Cuando todos los mercados de factores y productos son perfectamente competitivos, la economía satisface las condiciones de eficiencia de Pareto.

d) Sólo si las empresas actúan como monopolios maximizadores del beneficio se alcanzará el óptimo de la producción en el sentido de Pareto.

Soluciones:

1.b	2.d	3.b	4.d

PROBLEMAS

Problemas resueltos

1. Sea una economía de intercambio en la que hay 2 bienes X e Y en cantidades $\overline{X} = 10$ e $\overline{Y} = 10$ y 2 consumidores con funciones de utilidad $U_A = X_A^2 Y_A$ y $U_B = X_B Y_B^2$.

Se pide:

1°) Definir el Criterio de optimalidad de Pareto:

Un estado es óptimo en el sentido de Pareto cuando no admite mejora, es decir, cuando no es posible mejorar el bienestar de un individuo si no es a costa de perjudicar a otro.

2°) Considerando los siguientes estados, determinar los estados factibles

Estado	(X_A, Y_A)	(X_B, Y_B)
1	(1,6)	(9,4)
2	(5,5)	(5,5)
3	(5,2)	(5,8)
4	(1,8)	(9,4)

Un estado será factible si cumple las siguientes condiciones:

$X_A + Y_A = \overline{X} = 10$

$X_B + Y_B = \overline{Y} = 10$

Estado 1: $\begin{matrix} 1+9=10 \\ 6+4=10 \end{matrix}$ Factible

Estado 2: $\begin{matrix} 5+5=10 \\ 5+5=10 \end{matrix}$ Factible

Estado 3: $\begin{matrix} 5+5=10 \\ 2+8=10 \end{matrix}$ Factible

Estado 4: $\begin{matrix} 1+9=10 \\ 8+4\neq 10 \end{matrix}$ No es estado factible

3°) Calcular los niveles de utilidad para cada consumidor en cada estado y comparar cada par de estados explicitando si existe superioridad de uno de ellos.

Estado	U_A	U_B
1	6	144
2	125	125
3	50	320

1 No es comparable a 2

1 es comparable a 3 y 3 es Preferible a 1

2 No es comparable a 3

4º) Determine todos los estados óptimos en sentido de Pareto de esta economía e indique si alguno de los 4 estados anteriores es uno de ellos.

Curva de CONTRATO: $RMS_x^y(A) = RMS_x^y(B)$

$$\frac{\frac{\partial U_A}{\partial X_A}}{\frac{\partial U_A}{\partial Y_A}} = \frac{\frac{\partial U_B}{\partial X_B}}{\frac{\partial U_B}{\partial Y_B}} \Rightarrow \frac{2X_A Y_A}{X_A^2} = \frac{Y_B^2}{2X_B Y_B} \Rightarrow \frac{2Y_A}{X_A} = \frac{Y_B}{2X_B}$$

Estado1: (1,6) (9,4) ; $\frac{2\times 6}{1} \neq \frac{4}{2\times 9}$

Estado 2: (5,5) (5,5) ; $\frac{2\times 5}{2} \neq \frac{5}{2\times 5}$

Estado 3: (5,2) (5,8) ; $\frac{2\times 2}{5} = \frac{8}{2\times 5}$

Sí lo cumple, por lo tanto el estado 3 es óptimo en el sentido de Pareto.

5º) Considerando que la distribución inicial de bienes es la definida por el estado 1, calcular el equilibrio competitivo

El estado 1, recordemos, es:

$(X_A, Y_A) = (1,6)$

$(X_B, Y_B) = (9,4)$

– Obtenemos la relación de precios, de modo que la oferta de bienes sea igual a la demanda por parte de los consumidores, es decir:

$\frac{P_X}{P_Y}$ tal que se cumpla: $\overline{X} = X_A + X_B$, $\overline{Y} = Y_A + Y_B$

Demanda de A:

$$RMS_X^Y(A) = \frac{2Y_A}{X_A} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow 2Y_A P_Y = X_A P_X$$

$$R = X_A P_X + Y_A P_Y \Rightarrow R = 1 \cdot P_X + 6 \cdot P_Y$$

$$R = 2Y_A P_A + Y_A P_Y = 3Y_A P_Y \Rightarrow 3Y_A P_Y = P_X + 6P_Y$$

Despejando de la expresión anterior:

$$Y_A = \frac{P_X + 6P_Y}{3P_Y}$$

Del mismo modo se procede para el bien X:

$$R = X_A P_X + \frac{X_A P_X}{2} = \frac{3X_A P_X}{2} \Rightarrow \frac{3X_A P_X}{2} = 1 \cdot P_X + 6 \cdot P_Y$$

Despejando de la expresión anterior:

$$X_A = \frac{P_X + 6P_Y}{(3/2)P_X}$$

Demanda de B:

$$RMS_X^Y(B) = \frac{Y_B}{2X_B} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow Y_B P_Y = 2X_B P_X ;$$

$$R = X_B P_X + Y_B P_Y \Rightarrow R = 9 \cdot P_X + 4 \cdot P_Y$$

$$R = X_B P_X + 2X_B P_X = 3X_B P_X \Rightarrow 3X_B P_X = 9P_X + 4P_Y$$

Despejando de la última expresión:

$$X_B = \frac{9P_X + 4P_Y}{3P_X}$$

Del mismo modo se procede para el bien Y:

$$R = \frac{Y_B P_Y}{2} + Y_B P_Y = \frac{3Y_B P_Y}{2} \Rightarrow \frac{3Y_B P_Y}{2} = 9P_X + 4P_Y$$

Despejando en la última expresión:

$$Y_S = \frac{9P_X + 4P_Y}{(3/2)P_Y}$$

Buscando la relación de precios P_x/P_y de acuerdo al equilibrio Walrasiano:

$\overline{10} = X_A + X_B$

$\overline{10} = Y_A + Y_B$

Sustituyendo las demandas de *A* y *B* para el bien *X* y el bien *Y*:

$$10 = \frac{P_X + 6P_Y}{(3/2)Px} + \frac{9P_X + 4P_Y}{3P_X}$$

$$10 = \frac{P_X + 6P_Y}{3P_Y} + \frac{9P_X + 4P_Y}{(3/2)P_Y}$$

Considerando que P_y=1 en la primera de las anteriores expresiones se tiene que:

$$10 = \frac{P_X + 6}{3} + \frac{9P_X + 4}{3/2} \Rightarrow P_X = \frac{16}{19}$$

El mismo resultado se obtendría utilizando la segunda expresión, es decir, la correspondiente al bien *Y*.

De manera que la relación de precios que ha de darse para que la demanda de cada bien sea igual a la oferta de cada bien es:

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{16}{19}.$$

2. Sea una economía de intercambio con 2 bienes y 2 consumidores con las siguientes funciones de utilidad:

$U_A = X_A^2 Y_A^3$

$U_B = X_B Y_B^2$

y con dotaciones de ambos bienes:

$\overline{X} = 10$

$\overline{Y} = 8$

Se pide:

1°) Obtener los Estados Óptimos en el sentido de Pareto.

2°) Si la distribución de bienes entre los consumidores fuera $(X_A, Y_A)=(6,7)$ y $(X_B, Y_B)=(4,1)$ ¿Estaríamos en equilibrio?

1°) Los estados óptimos en el sentido de Pareto deben cumplir:

$RMS_x^y(A) = RMS_x^y(B)$

Por lo que, en nuestro caso:

$$\frac{2X_A Y_A^3}{3X_A^2 Y_A^2} = \frac{Y_B^2}{2X_B Y_B} \Rightarrow \frac{2Y_A}{3X_A} = \frac{Y_B}{2X_B} \quad (1)$$

Y, además, debe cumplirse:

$10 = X_A + X_B$

$8 = Y_A + Y_B$

De las expresiones anteriores tenemos que:

$X_A = 10 - X_B$

$Y_A = 8 - Y_B$

Sustituyendo ambas ecuaciones en la expresión (1) tenemos que la condición que deben cumplir los estados óptimos es:

$$\frac{2(8 - Y_B)}{3(10 - X_B)} = \frac{Y_B}{2X_B}$$

2°) Sustituimos los puntos en la fórmula anterior y vemos si cumple la igualdad, si es así, estaremos en un punto de la curva de contrato de la distribución y será óptimo en sentido de Pareto.

$$\frac{2(8-1)}{3(10-4)} \neq \frac{1}{2 \times 4} \Rightarrow \frac{14}{18} \neq \frac{1}{8}$$; No es óptimo de Pareto

3. Sea una economía con 2 bienes X e Y, un único factor productivo $\overline{K} = 30$, 2 consumidores con las siguientes funciones de utilidad:

$U_A = X_A Y_A^2$

$U_B = 2X_B + X_B Y_B$

y con 2 productores con las siguientes funciones de producción:

$$X = \frac{K(x)}{2}$$

$$Y = \frac{K(y)}{3}$$

Donde $K(x)$ refleja la cantidad de factor productivo que es función de la cantidad de x, mientras que $K(y)$ es la cantidad necesaria de factor productivo que es función de la cantidad de y.

Se pide:

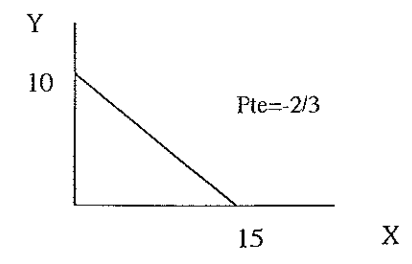
a) Determinar la curva de transformación.

b) Si consideramos el siguiente mecanismo económico: 18 unidades de K se utilizan en producir X y el resto en producir Y, y los bienes se distribuyen: Para B el doble de X que para A y para el consumidor A el triple de Y que para B. Determinar los precios en el equilibrio competitivo.

a) Curva de transformación:

$30 = K(x) + K(y); \quad 30 = 2X + 3Y$

Pendiente de la FPP=-2/3



b) En primer lugar obtendremos las cantidades producidas de ambos bienes a partir de las funciones de producción de cada uno de ellos y de las cantidades de capital empleadas en la producción de los mismos:

$$X = \frac{K(x)}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$Y = \frac{K(y)}{3} = \frac{30-18}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Ahora obtenemos el reparto entre los individuos A y B a partir de la distribución que se propone en el enunciado y teniendo en cuenta que:

$\overline{X} = X_A + X_B; X_A + X_B = 9$

$\overline{Y} = Y_A + Y_B; Y_A + Y_B = 4$

Reparto de X:

$$X_B = 2X_A,\ X_A + 2X_A = 9 \Rightarrow X_A = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow X_B = 9 - 3 = 6$$

Reparto de Y:

$$Y_A = 3Y_B,\ 3Y_B + Y_B = 4 \Rightarrow Y_B = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow Y_A = 4 - 1 = 3$$

Por lo que la distribución final de bienes es:

Individuo A= (3,3) y para el Individuo B=(6,1)

Pasamos, ahora, a obtener las funciones de demanda del bien X para cada uno de los individuos. Comenzando con el individuo A:

$$\frac{\frac{\partial U_A}{\partial X_A}}{\frac{\partial U_A}{\partial Y_A}} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$R_A = X_A P_X + Y_A P_Y$

$9 = X_A + X_B$

$4 = Y_A + Y_B$

$$\frac{Y_A^2}{2X_A Y_A} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow Y_A P_Y = 2X_A P_X$$

$R_A = X_A P_X + Y_A P_Y = X_A P_X + 2X_A P_X = 3X_A P_X$

$3X_A P_X = 3P_X + 3P_Y$

Despejando de la anterior expresión para la cantidad de X:

$$X_A = \frac{3P_X + 3P_Y}{3P_X}$$

Procediendo del mismo modo para el individuo B se obtiene:

$$X_B = \frac{6P_X + 3P_Y}{2P_X}$$

Finalmente:

$9 = X_A + X_B$, sustituyendo por las expresiones de las demandas de A y B antes obtenidas:

$$9 = \frac{3P_X + 3P_Y}{3Px} + \frac{6P_X + 3P_Y}{2P_X}$$

$$9 = \frac{6P_X + 6P_Y + 18P_X + 9P_Y}{6P_X} \Rightarrow 54P_X = 24P_X + 15P_Y \Rightarrow 30P_X = 15P_Y \Rightarrow$$

$$P_X = \frac{1}{2} P_Y \Rightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{1}{2}$$

Si $P_X = 1$ y $P_Y = 2$, se cumple la relación: $\frac{P_X}{P_Y} = \frac{1}{2}$

Para ver un óptimo global en sentido de Pareto es necesario que

$$RMT = RMS = \frac{P_X}{P_Y} \; ;$$

En nuestro caso: $RMT = \frac{2}{3}$ y $\frac{P_X}{P_Y} = \frac{1}{2}$

Por lo que alcanzamos una situación de equilibrio en el intercambio o consumo pero no para el Equilibrio General.

Noticias de actualidad para el análisis

ARCHIVO
EDICIÓN IMPRESA
PRIMERA
ÍNDICE
INTERNACIONAL
OPINIÓN
VIÑETAS
ESPAÑA
SOCIEDAD
CULTURA
ESPECTÁCULOS
AGENDA
DEPORTES
› ECONOMÍA
RADIO Y TV.
ÚLTIMA
AUTONOMÍAS
SUPLEMENTOS
ESTADÍSTICAS
PARTICIPACIÓN
SERVICIOS
JUEGOS
HERRAMIENTAS
AYUDA

El déficit de pienso causa un alza espectacular de los precios

V. M. | Madrid

España deberá importar esta campaña más de seis millones de toneladas de cereal pienso para cubrir el déficit provocado en esta campaña por la caída de las producciones. Este hundimiento de la cosecha se tradujo en los últimos meses en una fuerte subida de los precios en origen, que se situaron en casi 24 pesetas por kilo, frente a un precio de intervención de 16,8 pesetas por kilo.

En este momento, los cereales pienso protagonizan un nuevo repunte tras la venta por parte del organismo de intervención de unas 550.000 toneladas de cebada para aumentar la oferta.

Según datos oficiales, la cosecha de cereales pienso de invierno ha sido de 12,5 millones de toneladas, frente a los casi veinte millones de toneladas de la campaña anterior. La demanda anual de cereales pienso se cifra entre 21 y 23 millones de toneladas.

Consecuencia de las malas condiciones meteorológicas del año anterior, fuertes lluvias y posterior sequía, se produjo el hundimiento de la cosecha de trigo, que pasó de 7,3 a 5,2 millones de toneladas y fundamentalmente de cebada, que cayó de 11,6 a 6,4 millones de toneladas. La única nota positiva fue el incremento de la cosecha del maíz.

mercados
UTILIDADES
Imprimir
Enviar
Estadística
¿Le interesa esta noticia? SI

Imprimir | Enviar | Estadística | ¿Le interesa? SI

Portada | Buscador | Última Hora | Especiales | Temas | Multimedia | Fotografía
Edición Impresa | Autonomías | Suplementos | Estadísticas | Participación
Servicios | Juegos | Herramientas | Ayuda

Documento Encontrado





2001.12.21

EDF ha renovado más de 9.000 kilómetros de su red tras las violentas tormentas registradas hace dos años

Francia mantiene severas restricciones a la libre competencia en el sector eléctrico

J. R. GONZÁLEZ CABEZAS
París. Corresponsal

Pese a la teórica y tardía desaparición del monopolio≥ eléctrico en febrero del año 2000, la empresa nacional Electricité de France (EDF) conserva su fuerte posición dominante en el mercado francés, bajo la protección y tutela del Ministerio de Economía y Finanzas, que fija las tarifas y define la política de grandes inversiones. Opuesta tenazmente a la liberalización del mercado europeo de la energía y decidida a defender el principio de servicio público, Francia mantiene a través de la nueva legislación severas restricciones a la libre concurrencia, al no desmantelar las ventajas de que disfruta EDF como operador histórico.

Aunque en general la seguridad del suministro es alta (menos de una hora de interrupción media anual por cliente, según datos de 1999), la ola de frío y nieve registrada en las regiones meridionales del país dejó sin electricidad durante varios días a más de 15.000 abonados de Córcega. Tras las violentas tormentas que hace dos años devastaron gran parte de los bosques de Francia y colapsaron el país durante semanas, EDF ha renovado unos 9.100 kilómetros de la red de suministro, con una inversión de 89.800 millones de pesetas.

La compañía asegura que hasta el 2015 invertirá 582.000 millones de pesetas en la puesta a punto de toda su red y ha creado un amplio dispositivo de emergencia para garantizar en cinco días el suministro al 95% de los afectados por una catástrofe grave. Así, ha creado una "fuerza de intervención rápida" con 2.300 personas y 1.500 vehículos puesta a prueba en Córcega.

EDF cuenta con 31 millones de clientes y gestiona la red de alta tensión a través de una entidad autónoma, mientras que la red de distribución (líneas de media y baja tensión) sigue en sus manos y en las de 150 empresas no nacionalizadas que conservan el ≤monopolio local con concesiones municipales.

Éste es el caso de la Compagnie Nationale du Rhône, que junto a la Société Nationale d'Electricité et de Thermique son dos grandes productores "independientes" de EDF, aunque controlados en parte o ligados a EDF. En la práctica, la situación es de pseudomonopolio, pese a la teórica apertura de la red a terceros y la facultad de elegir libremente a los suministradores en la UE, posibilidad reservada en realidad a los grandes consumidores industriales. Francia protege con celo su sector eléctrico a la vez que trata de redimensionarlo internacionalmente. Con 58 centrales nucleares que generan el 75% de la energía primaria nacional, es el segundo país del mundo en producción de energía nuclear y el cuarto de la OCDE en consumo de energía. Exporta a Alemania y Reino Unido e importa de Suiza. El coste de la electricidad es 10,45 pesetas kw/hora, tasas excluidas (IVA e impuestos locales), frente a las 17 pesetas totales de España.

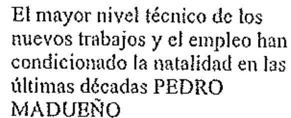
Documento Encontrado



2002.01.06

Está surgiendo una generación con mayor capacidad de asumir riesgos, incluso para tener hijos

El paro de los años 80 aplazó las decisiones de matrimonio de muchas jóvenes altamente educadas



El mayor nivel técnico de los nuevos trabajos y el empleo han condicionado la natalidad en las últimas décadas PEDRO MADUEÑO

Familias: la bolsa o la vida

La demografía se ha resentido en España mientras crecía la riqueza financiera

La incertidumbre sobre el futuro ha llevado a las familias españolas a anteponer la formación de un patrimonio a tener niños. Además, la percepción de que los hijos disminuyen el ahorro familiar ha llevado a que la tasa de natalidad caiga al 1,07, la más baja de la UE. Pero, atención, ¿y si la bolsa provocara una revolución natalista?

J.M. Garayoa / E. Magallón

Las familias españolas están priorizando la creación de un patrimonio financiero sobre el tener hijos. Por eso cae la tasa de natalidad y no por la ausencia de políticas suficientes de apoyo a la familia, aunque ese factor también cuente. Es una de las sorprendentes conclusiones de un estudio ("La familia española en el año 2000") dirigido por Víctor Pérez-Díaz, catedrático de Sociología de la Universidad Complutense.

En los últimos años, las familias han mostrado una voluntad clara de aumentar sus propiedades sobre activos inmobiliarios y financieros, que puede contribuir a reforzar los vínculos familiares, pero, también, a inhibir su número de miembros. De hecho, no es casual que los españoles, junto con los británicos, sean los europeos que muestran una mayor vocación bursátil, y al mismo tiempo, tengan la tasa de natalidad más baja de la UE.

El factor principal que conduce a las familias a constituir patrimonios es el de cubrirse las espaldas ante posibles contingencias futuras. "Quizá porque la rapidez de los cambios de la economía y de la tecnología acrecienta la incertidumbre del porvenir", según Pérez-Díaz. Esta tendencia es algo que se arrastra ya desde hace años, como demuestra el crecimiento de los activos financieros de las familias. Mientras en 1997 significaban un 139% del producto interior bruto (PIB), en 1999 superaban el 150%, si bien parte de ese

incremento se debió a la revalorización de las acciones.

Otro factor que incurre en la decisión de posponer ser padres es la percepción de que la riqueza disminuye con el número de hijos. Según un estudio de la Bolsa de Madrid, un miembro adicional en un hogar rebaja la tasa de ahorro aproximadamente un 6%. De acuerdo con los últimos datos disponibles, las familias formadas por la pareja y un solo vástago tienen unos ingresos per cápita (proporcionales en función de la edad) superiores en un 121% de la media. El resto de parejas con hijos están por debajo. Aquellas con tres o más niños sólo alcanzan el 70% de la media.

A todo esto hay que añadirle el cambio que ha experimentado la sociedad. En los años 70 y a vista de la mayor movilidad social que se daba, los padres apostaron fuerte por la educación de sus hijos, de forma que estos no se vieran excluidos de la misma, y en especial de sus hijas, las "cenicientas" hasta entonces. Sin embargo, las ambiciones de aquellos años se vieron, en buena parte, frustradas porque, con un elevado paro, el mercado de trabajo se mostró incapaz de absorber a esas generaciones altamente educadas.

Ello produjo un aplazamiento de los matrimonios de muchos jóvenes, y de cualquier decisión de procrear. Los hijos postergaron el abandono del hogar paterno, a lo que contribuyó asimismo una mayor libertad sexual que hacía innecesario la cohabitación de las parejas. La consiguiente búsqueda de empleo y la consolidación posterior en un puesto de trabajo en busca del éxito profesional frenaron aún más la llegada de niños. Mientras que en 1975 las mujeres tenían su primer hijo a los 24,8 años, dos décadas más tarde el primer retoño llegaba cuando ella cumplía 27,7 años.

Paralelamente, se produjo un salto de la mujer (con mayor nivel de educación) hacia el mundo del trabajo. Tras la muerte de Franco sólo una de cada 10 mujeres que estaba en activo tenía estudios superiores. A finales de los 90, las universitarias suponen una cuarta parte del total de las mujeres en activo.

Junto a estos cambios, Víctor Pérez-Díaz destaca el desincentivo que ha significado el alto coste de las viviendas junto con la "provinciana" cultura inmobiliaria de los españoles. "En España la integración en el mundo laboral es difícil y el acceso a la vivienda implica además desembolsos importantes", precisa. La sociedad española se caracteriza por tener un importante arraigo hacia la propiedad. Necesita una vivienda en propiedad porque existe una cultura de movilidad geográfica muy limitada. "A la larga habrá problemas porque no se conjuga bien la movilidad que debe tener una sociedad moderna con la sedentarización brutal que existe actualmente", añade el catedrático.

Pérez-Díaz no es pesimista. Su confianza se basa en la posibilidad de un cambio de escenario siguiendo un intrincado meandro. En su opinión, el patrimonio financiero de las familias está experimentando desde hace varios años una pequeñas revolución: los productos clásicos, como depósitos o colocaciones en renta fija, están retrocediendo en beneficio de otros de mayor riesgo. Esto comporta un cambio de mentalidad que puede ocasionar consecuencias para la propia tasa de natalidad. "Está surgiendo una generación con mayor capacidad de asumir riesgos incluso para crear y desarrollar una familia", dice esperanzado. Así se cerraría el ciclo.

CincoDías

Miércoles 9 de enero de 2002

AL DÍA | Empresas

Telefónica domina el negocio del ADSL en sólo cuatro meses

Las 240.000 conexiones de banda ancha de la operadora acrecientan los recelos de sus rivales

Inés Abril. Madrid.

Telefónica de España sólo ha necesitado cuatro meses para hacerse con el mercado de las conexiones de banda ancha a través de la tecnología ADSL. En este tiempo, la operadora ha instalado 240.000 líneas de Internet de alta velocidad, una cifra que supera la de Terra y todos sus rivales juntos. El registro logrado por Telefónica confirma los peores temores del sector, que alertó sobre la posición de monopolio que podría adquirir la operadora dominante, pero también demuestra que el mercado de la banda ancha llevaba años dormido y necesitaba un revulsivo.

La intención de Telefónica de España de vender ADSL directamente a clientes finales despertó una verdadera guerra en el sector y una lucha de menor calado, y trascendencia pública, dentro del propio grupo, ya que hasta entonces el servicio y las ganancias eran para Terra casi en exclusiva. Cuatro meses después, los temores se han demostrado fundados.

La filial de telefonía fija del ex monopolio ha cerrado el año con 240.000 líneas de ADSL conectadas, frente a las 130.000 de Terra y a las poco más de 100.000 del resto de los operadores (Retevisión, Uni2, Jazztel...). Y todo ello a pesar de que sus competidores llevaban más de dos años de ventaja.

El éxito de Telefónica de España tiene una doble lectura. Cuando la operadora pidió permiso a la Comisión del Mercado de las Telecomunicaciones (CMT) para convertirse en proveedor minorista de

ADSL el sector puso el grito en el cielo. Hasta ese momento, la compañía actuaba sólo como vendedora mayorista tanto para las empresas de su grupo (eran Terra y Telefónica Data las encargadas de servir el producto a los clientes finales) como para el resto de los operadores del mercado. Y el temor de sus rivales era que la entrada de Telefónica de España en la lucha les cerrara a ellos las puertas.

La CMT escuchó en un principio las quejas del sector y determinó que la llegada del ex monopolio al mercado del ADSL podría interferir en la competencia. Pero no tardó mucho en cambiar de opinión y en agosto dio luz verde a la petición de Telefónica.

En sólo cuatro meses, por tanto, la operadora se ha hecho con la mitad del mercado, pero también ha contribuido a revitalizarlo, como dijo que haría. Uno de los principales argumentos de Telefónica para cambiar el rumbo del ADSL era el escaso desarrollo que había tenido en los últimos años. La compañía lleva desde finales de 1999 dando Internet a alta velocidad como mayorista y lo cierto es que la demanda del resto de los operadores ha sido muy escasa. Por ello, cuando el sector atacó a Telefónica por su intención de convertirse en minorista, la operadora se defendió asegurando que sus competidores habían tenido dos años para interesarse por este mercado y no lo habían hecho.

Las cifras proporcionadas por Telefónica en ese momento hablaban por sí solas. España era, en enero de 2001, el segundo país entre los grandes del mundo con menos conexiones de banda ancha por cada 100 habitantes. En estas circunstancias, no es de extrañar que el secretario de Estado de Telecomunicaciones, Baudilio Tomé, considerara todo un éxito que España tuviera 400.000 líneas de ADSL a finales del mes de noviembre, a pesar de que, ya en ese momento, más de la mitad eran de Telefónica de España y otras 100.000 de Terra.

Obstáculos

Los competidores del ex monopolio tienen otra visión del crecimiento de Telefónica en ADSL y aseguran que buena parte de él viene dado por los obstáculos que la operadora dominante ha puesto en el camino en los últimos años. Aunque el servicio es posible desde finales de 1999, lo cierto es que sólo Terra lo da en condiciones desde entonces. El resto -Retevisión, Uni2, Jazztel, BT- lo lanzó en condiciones muy limitadas, hasta el punto de que ahora alguna de ellas afirma que no ha llegado al mercado hasta 2001. Éste es el caso de Eresmas, que ha cogido el testigo del ADSL de Retevisión y salió con él en mayo del año pasado. Sólo en ese momento, asegura la empresa, se daban las condiciones de cobertura y de madurez de los clientes adecuadas. Uni2, por su parte, lanzó su oferta en septiembre (Wanadoo lo hizo en primavera), porque hasta entonces el servicio no tenía los niveles de calidad y fiabilidad necesarios.

Publicado en página 2

EDICIÓN IMPRESA > ECONOMÍA — ESTADÍSTICA DE LA NOTICIA

Sábado, 17 de noviembre de 2001

Los índices usados en las hipotecas bajan al nivel de septiembre de 1999

EL PAÍS | Madrid

Los índices *Mibor* y *Euribor*, los más utilizados en España para calcular el interés de los préstamos hipotecarios, registraron una bajada de cuatro décimas en octubre y se situaron en el 3,37%, el nivel más bajo desde septiembre de 1999, informó ayer el Banco de España.

Este recorte supone un descenso de 1,85 puntos en sólo doce meses, lo que permitirá a las familias con una hipoteca de 100.000 euros (16,6 millones de pesetas) a interés variable ahorrarse unas 200.000 pesetas anuales, según fuentes del mercado consultadas por Efe.

Los descensos del *Mibor* y el *Euribor* fueron más acentuados que los recortes de los tipos medios que aplican las entidades, pues los bancos rebajaron el interés que cobran en las hipotecas 0,27 puntos y lo situaron en el 5,206%, en tanto que las cajas lo disminuyeron 0,19 puntos y lo dejaron en el 5,582%.

El tipo medio de los préstamos hipotecarios a un plazo de más de tres años para adquisición de vivienda libre del conjunto de las entidades de crédito descendió, por tanto, 0,237 puntos y quedó en el 5,627%. El tipo activo de referencia de las cajas de ahorro, habitualmente el más elevado pero también más estable, quedó en el 6,5%, tras caer 0,125 puntos.

Apéndice matemático

La finalidad de este apéndice no es otra que la de repasar brevemente alguno de los conceptos matemáticos más utilizados a lo largo de este libro. El objetivo es exponer definiciones sencillas e intuitivas que puedan ayudar en el seguimiento de los términos aquí tratados sin que esto suponga una falta de rigor en su conceptualización. Para una mayor profundización en cualquiera de los temas sería recomendable la consulta de textos matemáticos.

1. FUNCIONES

Una función es una asociación entre números de acuerdo a una regla determinada. Su representación más habitual es $y = f(x)$, en este caso x es conocida como el *argumento* de la función, *variable independiente* o *exógena* e y es el *valor* de la función, *variable dependiente* o *endógena*. La letra f es el símbolo que indica una regla de aplicación mediante la cual expresamos que la variable y depende de la variable x, por ello la variable y recibe el nombre de *dependiente* o *endógena* (se origina desde dentro al realizar la transformación). Las variables se representan mediante símbolos para expresar que pueden asumir distintos valores. Por el contrario, una *constante* es una magnitud que no varía.

Por ejemplo, la función $y = x/3$, describiría la regla "la magnitud y es igual a un tercio de la magnitud x".

En el ejemplo anterior, hemos considerado una función con una única variable, esto es, el valor de y depende únicamente del valor de x teniendo en cuenta una determinada regla de transformación. Pero una función puede tener dos o más variables independientes, $y = f(x_1,x_2,\ldots)$. En este caso, el valor de la variable y depende de los valores de las variables independientes $x_1,x_2\ldots$.

1.1 Ecuaciones e identidades

Una *ecuación* especifica la forma en que una variable responde a cambios en la otra variable:

$$y = 20 + x^3 \qquad [1]$$

Una *identidad* es una relación que se cumple con independencia de los valores de dichas variables:

$$(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2 \qquad [2]$$

Por tanto, la diferencia entre una ecuación y una identidad es que la primera se cumple sólo en algunos valores de la variable mientras que una identidad se cumple para todos los posibles valores de las variables.

1.2 Tipos de Funciones

La expresión $y = f(x)$ describe una forma genérica de transformación. Dentro de esta regla genérica existen distintos tipos específicos de funciones, representando cada uno de ellos una determinada asociación.

Algunos ejemplos serían:

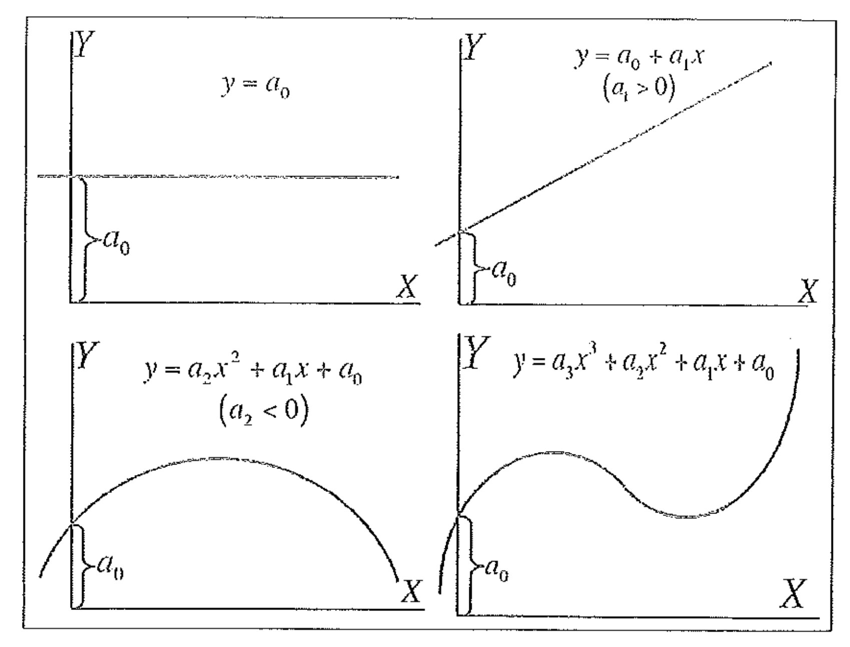
- *Función Constante*: Constituida por un único elemento que es constante, a_0. En este caso la función sería $y = a_0$.
- *Función Polinómica o Polinomial*: Constituida por diversos términos y cuya forma general sería $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Los términos "*a*" son los *coeficientes* y los superíndices de las potencias de *x* son los *exponentes*. La potencia más elevada constituye el *grado* del polinomio. Así una *función constante* es una función polinomial de grado cero. Si tenemos grado 1 hablaríamos de una *función lineal*, $y = a_o + a_1x$. La *función cuadrática* es de grado 2, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Una *función cúbica* tiene grado 3, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, y así sucesivamente.
- *Función Racional*: Constituida por *ratios* (razón) entre dos polinomios. Un ejemplo de este tipo de funciones sería, $y = \dfrac{a_0 + a_1x}{a_2x^3}$.
- *Funciones no Algebraicas*: Son aquéllas que no vienen expresadas como polinomios o raíces. Un ejemplo de función no algebraica sería las *Funciones Trigonométricas* como $y = \cos x$. También sería el caso de las *Funciones Exponenciales* que presentan la característica de tener la variable exógena en el exponente, $y = a^x$ o las *Funciones Logarítmicas* como $y = \log_a x$.

1.3 Representación gráfica de funciones

El gráfico de una función, de una única variable independiente, va a consistir en todos los puntos del plano cartesiano de coordenadas (x,y) que satisfacen la función $y = f(x)$.

Por ejemplo, podemos representar los gráficos de las funciones que hemos enunciado anteriormente:

Figura 1. Representación gráfica de los valores positivos de funciones constante, polinómicas, exponencial y logarítmica

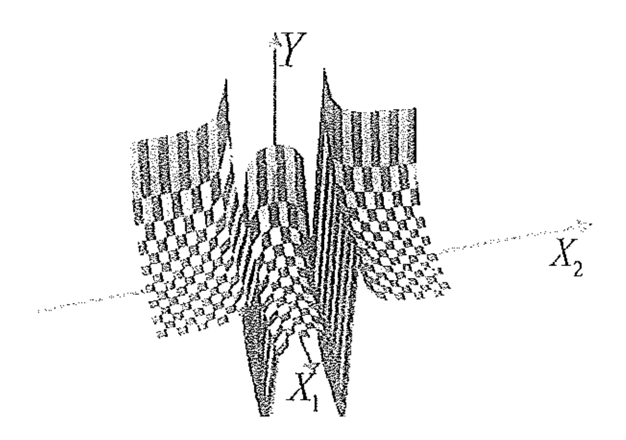


Es conveniente recordar que a menudo en economía, a diferencia de lo que se hace en otros campos como las matemáticas, la variable exógena se representa en el eje de ordenadas (eje vertical) y la variable endógena en el eje de abscisas (eje horizontal).

Otra consideración a tener en cuenta es que hasta ahora se han considerado funciones de una única variable independiente pero como hemos indicado ante-

riormente, las funciones pueden tener dos o más variables exógenas. En el caso de dos variables independientes, $y = f(x_1,x_2)$, tendríamos una terna ordenada de puntos (x_1,x_2, y) cuya representación gráfica constituye una superficie en un espacio tridimensional.

Figura 2. Representación de la función $y = \frac{x_1^{1/3}}{1,5x_1} + \frac{x_2^{\,2}}{3x_2^{\,2} - 1}$



Del mismo modo, si disponemos de 3 variables exógenas se hablaría de una *hipersuperficie* cuya representación no es posible porque se necesitaría un espacio de cuatro dimensiones.

1.4 Propiedades de las funciones

Las funciones que van a ser utilizadas habitualmente en economía van a tener unas propiedades básicas que de forma general pueden enunciarse como:

- *Continuidad*: Una función es continua si su representación gráfica puede realizarse de un único trazo, es decir no presenta ningún salto.
- *Crecimiento* o *Decrecimiento*: Una función es *creciente* si su representación gráfica se mueve hacia arriba a medida que se desplaza desde la izquierda hacia la derecha. Por el contrario, una función es *decreciente* si su representación gráfica se desplaza hacia abajo a medida que se mueve desde la izquierda a la derecha.

De una forma más precisa se puede indicar que una función es estrictamente creciente si para un $x_1 > x_0$, donde x_1 y x_0 son valores de la variable x, se cumple que $f(x_1) > f(x_0)$. Será estrictamente decreciente si para un $x_1 > x_0$ ocurre que $f(x_1) < f(x_0)$.

- *Función Monótona*: Una función es monótona si siempre es creciente o decreciente.
- *Máximo* y *Mínimo*: Si una función pasa de ser creciente a decreciente [decreciente a creciente] en un punto x_0 dicha función tiene un *Máximo* [*Mínimo*] *local o relativo* en x_0. Esto implica que la gráfica de la función f estará por debajo [encima] del punto $(x_0, f(x_0))$ alrededor de dicho punto. Si además se cumple que la gráfica de la función nunca alcanzará un punto superior [inferior] a $(x_0,f(x_0))$, es decir, si $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$] para cualquier x entonces $(x_0, f(x_0))$ es un *Máximo* [*Mínimo*] *absoluto o global* de f.

Figura 3. Representación de Máximo global y local

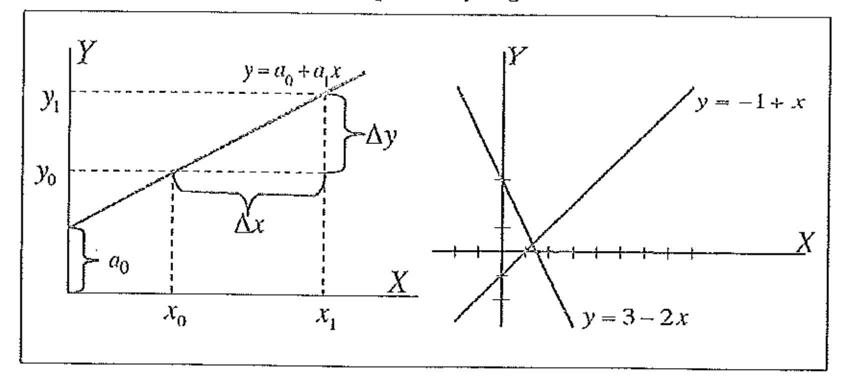
1.5 Función Lineal

Anteriormente, se ha definido una función lineal como aquélla que es de la forma $y = a_0 + a_1x$. Estas funciones tienen la característica de indicarnos de una forma simple aspectos interesantes.

- El primer coeficiente, a_0, indica el valor de intersección del gráfico con el eje de ordenadas, esto es, cuál es el valor de la función cuando la variable independiente toma un valor nulo, al cual se le conoce como *ordenada en el origen*.

- El segundo parámetro, a_1, nos va a indicar dos cuestiones relevantes. La primera, mediante su signo, es si la relación entre la variable independiente y la dependiente es positiva o negativa. Si es *positiva*, al aumentar la magnitud de la variable independiente también aumenta la magnitud de la variable dependiente y si disminuye el valor de la variable independiente también lo hará el de la dependiente. En este caso, la función lineal es creciente. Por el contrario, si esta relación es *negativa*, cuando la variable independiente aumenta, la dependiente disminuye de valor y viceversa, siendo la función lineal decreciente. La segunda cuestión es que la magnitud del coeficiente a_1 expresa cuánto varía la variable dependiente, y, al cambiar la variable independiente, x, en una unidad. Cuanto mayor sea la magnitud de a_1, mayor será el cambio de y al cambiar x. Gráficamente, esto supondría una mayor inclinación de la recta que describe la relación entre ambas variables. Por tanto, a_1 describe la *pendiente* de la recta.

Figura 4. Pendiente y relación positiva y negativa en una relación lineal



1.5.1 Pendiente de una relación lineal

Es el cambio que sufre la variable dependiente, y, por cada unidad que cambia la variable independiente, x. Es decir, la pendiente de una función mide cuánto varía $f(x)$ al variar x y, esto es, simplemente, la tasa de variación de la función f. Por tanto, dados dos puntos cualesquiera, (x_0,y_0) y (x_1,y_1) de la recta que define la relación entre x e y, la relación por cociente:

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad [3]$$

es la pendiente de la recta. La característica definitoria de una función lineal es que va a tener la misma pendiente, misma tasa de cambio, con independencia de los puntos de la recta que tomemos como referencia.

1.6 Tasa de variación y variaciones

Se ha señalado que la pendiente nos indica la tasa de variación de una función. Conviene recordar qué se entiende por variación y qué por tasa de variación antes de pasar a estudiar otro término de amplio uso en las matemáticas, la derivada de una función.

La notación Δx expresa el *cambio* o *variación* que sufre una variable al pasar de tener una magnitud x_0 a otra x_1. El cambio se mide por la diferencia, es decir, $\Delta x = x_1 - x_0$, aunque esta expresión también puede formularse como $x_1 = x_0 + \Delta x$ expresando el hecho que x_1 es simplemente x_0 más una variación.

Del mismo modo, es necesario representar los valores que puede tomar la función y, para cada valor de x. Usualmente, se utiliza la notación $y = f(x_i)$ para designar cuál es el valor de la función $y = f(x)$ cuando x toma un determinado valor x_1. Por tanto, si x varía de x_0 a x_1, la función y variará de tener un valor $y_0 = f(x_0)$ a otro $y_1 = f(x_1)$ o expresado en términos de variación, $\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Una vez que sabemos qué es la variación de x y de y podemos definir la *tasa de cambio* o *tasa de variación* como el cociente entre dos variaciones:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad [4]$$

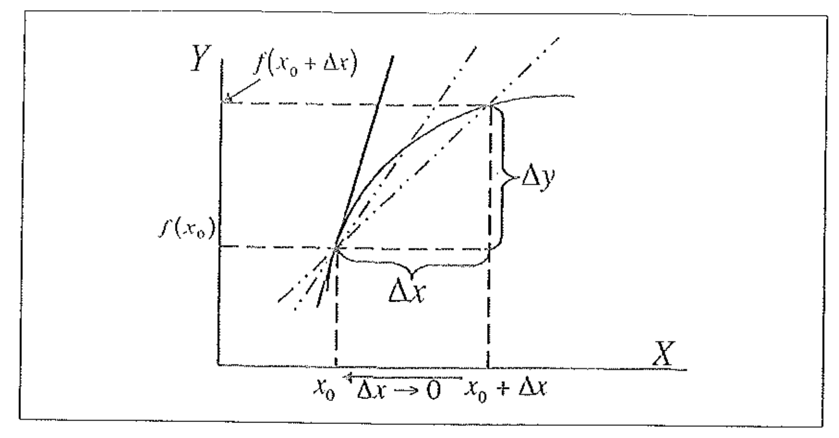
Esta tasa de variación indica el cambio en y por unidad de cambio en x.

2. DERIVADA

La derivada de una función $y = f(x)$ se define como la tasa de variación *instantánea* de y respecto a x cuando la variación de x tiende a ser nula y matemáticamente se calcula como:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad [5]$$

Figura 5. Pendiente de una función no lineal



En la expresión anterior se define de una forma general el concepto de derivada puesto que se considera un punto genérico x. Sin embargo, normalmente –las funciones lineales es una excepción a esta regla–, el valor de la derivada de una función dependerá de cuál sea el punto de la función en el que estemos calculando esta derivada.

Es conveniente resaltar que la noción de derivada se puede representar con diversas notaciones,

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x),$$

pero su significado no varía y es simplemente la tasa instantánea de cambio en un punto de la función. Por tanto, va a indicar cuál es la pendiente de la línea tangente a la función en un punto.

Si el límite del cociente de las diferencias $\Delta y/\Delta x$ existe en un punto x_0 entonces se dice que la función es *diferenciable en ese punto* y ese límite es la derivada de la función $y = f(x_0)$. Si una función es diferenciable en todos sus puntos diremos que la función es *diferenciable.*

Otro punto a destacar es que la derivada de una función es otra función puesto que asocia a cada valor de x el valor que toma la pendiente de la línea tangente a la función en dicho punto.

La derivada también es útil a la hora de representar una función puesto que su signo indica si la función crece o decrece al cambiar x.

- Si $f'(x_0) > 0$, la función es creciente en ese punto y alrededores.
- Si $f'(x_0) < 0$, la función es decreciente en dicho punto y alrededores.

- Si $f'(x_0) = 0$ y la función es diferenciable en x_0, entonces dicho punto es un máximo (f' cambia su signo de positivo a negativo al pasar de un punto justo a la izquierda de x_0 a otro justo a la derecha), un mínimo (el signo de f' ahora cambia de negativo a positivo) o un *punto de inflexión*, (el signo de f' no varía a la izquierda o derecha de x_0).

Figura 6. Función creciente y decreciente

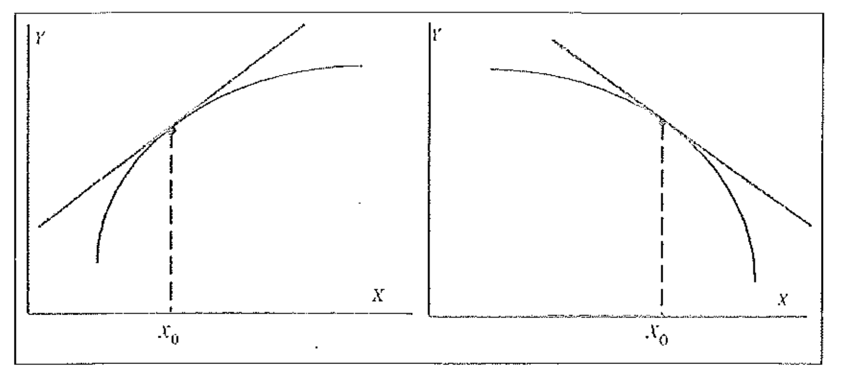
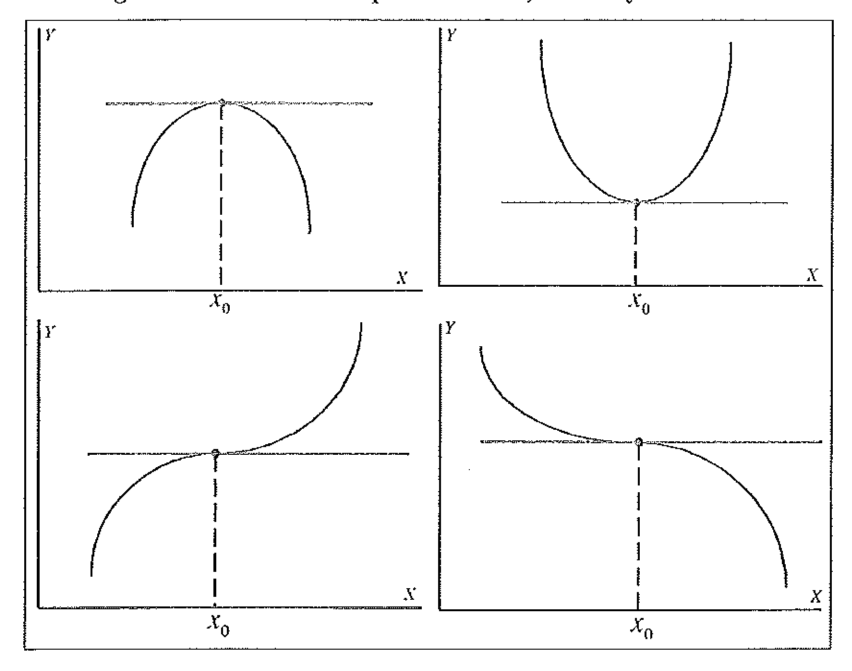


Figura 7. Pendiente en un punto máximo, mínimo y de inflexión



Algunas reglas simples de derivación son:

- Si $y = c$ siendo c una constante, entonces $f'(x) = 0$.
- Si $y = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Si $y = \ln x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.
- Si $y = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.
- $\frac{d[cf(x)]}{dx} = cf'(x)$ con c constante.
- $\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = f'(x) + g'(x)$
- $\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\frac{d[f(x)/g(x)]}{dx} = \frac{[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]}{g(x)^2}$ con $g(x) \neq 0$
- $\frac{d[\ln f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $\frac{d[e^{f(x)}]}{dx} = f'(x)e^{f(x)}$

2.1 Derivada segunda y derivadas superiores

La derivada segunda de una función no es más que la derivada de la función derivada, siempre y cuando ésta sea continua y diferenciable. Su expresión será

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

o simplemente $f''(x)$. Si la derivada segunda existe para todos los valores de x entonces la función $f(x)$ es *dos veces diferenciable*. Del mismo modo, la derivada tercera se representaría por $f'''(x)$ y así sucesivamente.

Al igual que la derivada primera nos indica la pendiente de y, la segunda derivada mide la tasa de variación de la pendiente.

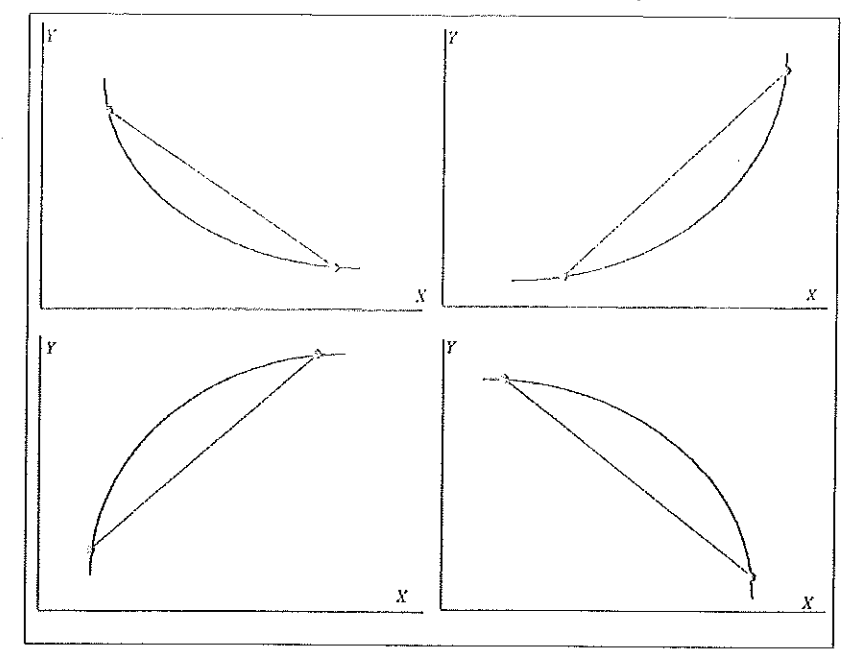
Así, si $f''(x) > 0$ en un punto, la pendiente de la curva tiende a aumentar a medida que aumenta la variable independiente. Por el contrario, si $f''(x) < 0$ sucedería que a medida que aumenta la variable x la pendiente de la curva tiende a disminuir.

Esta última cuestión está ligada al concepto de *convexidad* y *concavidad*.

2.2 Concavidad y Convexidad

Las funciones que presentan una derivada segunda positiva en un punto se denominan *convexas*, mientras que las que tienen su derivada segunda negativa son *cóncavas*.

Figura 8. Representación de funciones convexas y cóncavas



Es importante recalcar que en el caso de la primera gráfica tenemos una función con pendiente creciente puesto que la pendiente se va acercando a un valor cero (se hace plana) y esto para números negativos implica que el valor es mayor a medida que está más cercano al cero.

Otra forma de caracterizar gráficamente la concavidad y convexidad es por medio de un segmento lineal que una dos puntos cualesquiera de esa función. Si el segmento lineal que une esos dos puntos está por encima de la curva que representa la función estaremos hablando de una función *convexa*. Si el segmento lineal queda por debajo de la curva, la función será cóncava.

2.3 Máximo y Mínimo

La noción de derivada segunda tiene también aplicación a la hora de estimar la presencia de un máximo relativo o un mínimo relativo en un punto de una función. Indicamos máximo o mínimo relativo porque el criterio es indiferente de la consideración de todos los puntos de la función o tan sólo un intervalo de ella. Anteriormente, se había señalado que si la derivada primera de una función en un punto era cero, dicho punto podría ser un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. La derivada segunda nos ayuda en la determinación de estos puntos. Consideremos un punto x_0

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo relativo de la función y.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x) > 0$, entonces x_0 es un mínimo relativo de la función y.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ deberemos recurrir a las derivadas sucesivas de la función en dicho punto hasta encontrar una derivada de orden superior, supongamos N, no nula. Entonces si N es par y $f^N(x_0) < 0$, el punto x_0 es un *máximo* relativo. Si N es par y $f^N(x_0) > 0$ estaríamos ante un *mínimo* relativo. Si N es impar, el punto x_0 sería un *punto de inflexión*, es decir, la pendiente de la función pasaría de ser creciente a decreciente o viceversa.

2.4 Regla de la Cadena

Esta regla es de aplicación ante la presencia de una función que a su vez depende de otra función. Supongamos que la función z depende de la variable y, $z = f(y)$, pero a su vez la variable y depende de otra variable x, $y = g(x)$. Esta relación también puede expresarse mediante una *función compuesta*, que no es más que una función de otra función. Si sustituimos en z la expresión de y obtenemos la función compuesta $z = f[g(x)]$.

La regla de la cadena indica que la derivada de la función z con respecto a la variable x es la derivada de z respecto a y multiplicada por la derivada de y respecto a x:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)g'(x) \qquad [6]$$

o en términos de la función compuesta:

$$\frac{d[f(g(x))]}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad [7]$$

Ambas expresiones son equivalentes.

Consideremos la función $z = 4y^2 + 2y$ siendo $y = 3x + 5$. La derivada de z respecto a x será:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (8y+2)3 = 24y + 6 = 24(3x+5)+6 \qquad [8]$$

La regla de la cadena es independiente del número de funciones que estén presentes, siendo el procedimiento de aplicación el mismo que el utilizado con dos funciones.

2.5 Derivadas Parciales

Son de aplicación cuando la variable dependiente es función de más de una variable independiente. Consideremos el caso de $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La *derivada parcial* indicará el cambio que sufre la función cuando tan sólo una de estas variables independientes varía, permaneciendo las demás variables inalteradas. Si en el caso anterior, la variable x_1 sufre un cambio, Δx_1, permaneciendo el resto de variables independientes constantes, la derivada parcial de la función respecto a la variable x_1 será:

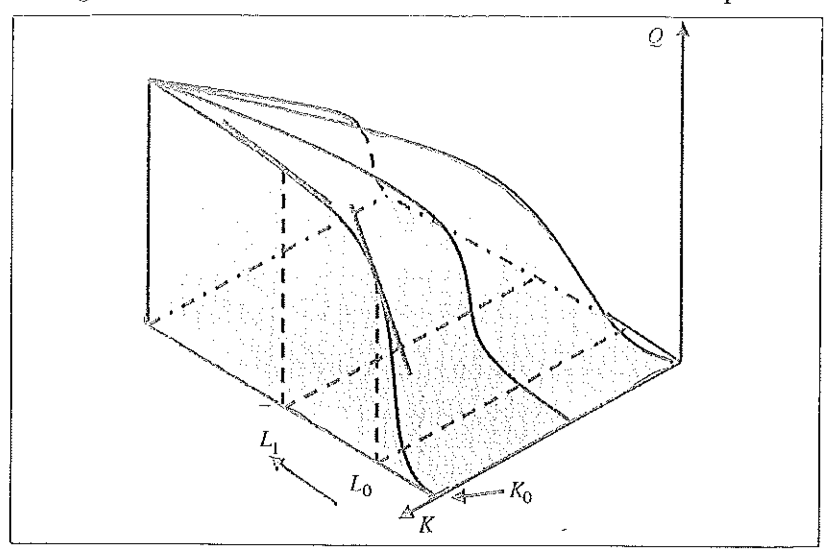
$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} \equiv f_1 \equiv \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1} \qquad [9]$$

El resto de derivadas parciales sería análogo. Es conveniente observar el cambio en la simbología cuando denotamos una derivada parcial, ∂ o f_1, respecto a la derivada de una función con una única variable. En la expresión f_1, el número nos indica cuál es la única variable independiente que está cambiando.

Como ejemplo, tomemos la función, $y = 5x_1^3 + 2x_2 - 4x_1x_2$. La derivada parcial respecto a x_1 será, $f_1 = 15x_1^2 - 4x_2$. Por otra parte, la derivada parcial respecto a la segunda variable, x_2, será, $f_2 = 2 - 4x_1$.

Gráficamente, podríamos considerar una aplicación económica. La función de producción indica la cantidad producida de un bien o servicio, Q, dependiendo de los factores productivos capital, K, y de la cantidad de mano de obra empleada en su producción, L. Si consideramos el corto plazo donde el capital está dado, la derivada parcial nos indicaría cómo varía la producción al cambiar la cantidad de mano de obra.

Figura 9. Variación de la cantidad de mano de obra en el corto plazo



3. OPTIMIZACIÓN

En sentido general, entenderemos por *optimización* "la búsqueda de lo mejor" ya sea *maximizar* una función como, por ejemplo, el beneficio de una empresa o *minimizar*, por ejemplo, el coste de fabricación de un producto. En todo problema de optimización tendremos una *función objetivo* cuya variable dependiente se querrá optimizar y unas variables independientes o *variables de elección* cuyas magnitudes se escogen con vistas a la optimización.

3.1 Optimización sin restricciones

3.1.1 Función con una única variable de elección

La optimización de una función con una única variable de elección es la búsqueda de un máximo o mínimo, que ha sido desarrollado en el epígrafe de derivadas.

3.1.2 Función con más de una variable de elección

Por motivos de simplicidad se va a analizar el caso de una función objetivo con únicamente dos variables de elección. En el caso de más de dos variables habría que emplear el cálculo matricial mediante la construcción de una matriz Hessiana. El proceso no es complicado y puede ser consultado en cualquier libro de matemáticas. De hecho, el caso para dos variables no es más que una particularización del caso general de varias variables de elección.

Si queremos estudiar si la función $y = f(x_1,x_2)$ presenta un máximo o mínimo en el punto de coordenadas (x_1^*,x_2^*) éste deberá satisfacer, en primer lugar, la condición siguiente:

$$\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \qquad [10]$$

Cualquier punto que cumpla esta condición se denomina *punto crítico*. A partir de aquí se deberá cumplir:

- Para un *Máximo*: Las derivadas parciales segundas respecto a ambas variables deben ser negativas y su producto mayor que la derivada parcial cruzada al cuadrado. La derivada parcial cruzada es el resultado de derivar respecto a una variable la derivada parcial obtenida tras derivar la función parcialmente por la otra variable. Esto es, si $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ es la derivada parcial respecto a la primera variable de decisión, la derivada parcial cruzada será el resultado de derivar respecto a x_2 la derivada parcial anterior, es decir,

  $$f_{1,2} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

  Por tanto, la condición para máximo será: $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} < 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} < 0$ y $(\partial^2 y/\partial x_1^2)\,(\partial^2 y/\partial x_2^2) > (\partial^2 y/\partial x_1 \partial x_2)^2$.

- Para un *Mínimo*: $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} > 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} > 0$ y $(\partial^2 y/\partial x_1^2)\,(\partial^2 y/\partial x_2^2) > (\partial^2 y/\partial x_1 \partial x_2)^2$.

- Para un *Punto de Silla* : $(\partial^2 y/\partial x_1^2)\,(\partial^2 y/\partial x_2^2) < (\partial^2 y/\partial x_1 \partial x_2)^2$.

A modo de ejemplo, si se estudian los puntos óptimos de la función $y = x_1^3 + 3x_2^2 - 3x_1x_2$, y hallamos las derivadas parciales obtenemos:

- $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3x_2$

- $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 6x_2 - 3x_1$

Ambas ecuaciones determinan dos puntos donde se cumple que $\partial y/\partial x_1 = \partial y/\partial x_2 = 0$. Los puntos son (0,0) y $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$. Al hallar las derivadas parciales segunda y la derivada parcial cruzada se obtiene.

- $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 6x_1$

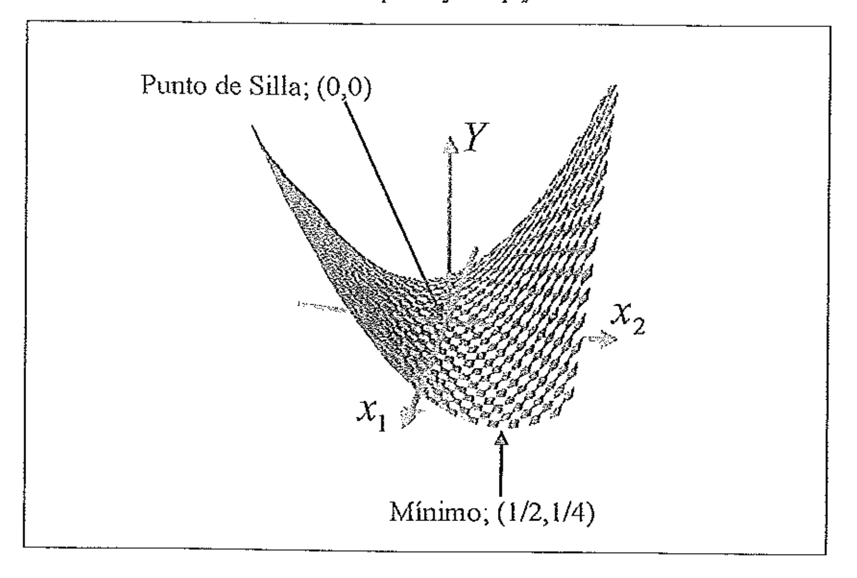
- $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 6$

- $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = -3$

El siguiente paso será evaluar las condiciones en cada uno de los dos puntos.

- En el punto (0,0) se cumple que $f_{11} \cdot f_{22} < (f_{12})^2$ y, por tanto, éste es un *punto de silla*.
- En el punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ se cumple que $f_{11} > 0$, $f_{22} > 0$ y $f_{11} \cdot f_{22} > (f_{12})^2$, es decir, el punto es un *mínimo*.

Figura 10. Representación de los puntos críticos de la función $y = x_1^3 + 3x_2^2 - 3x_1x_2$



3.2 Optimización con restricciones

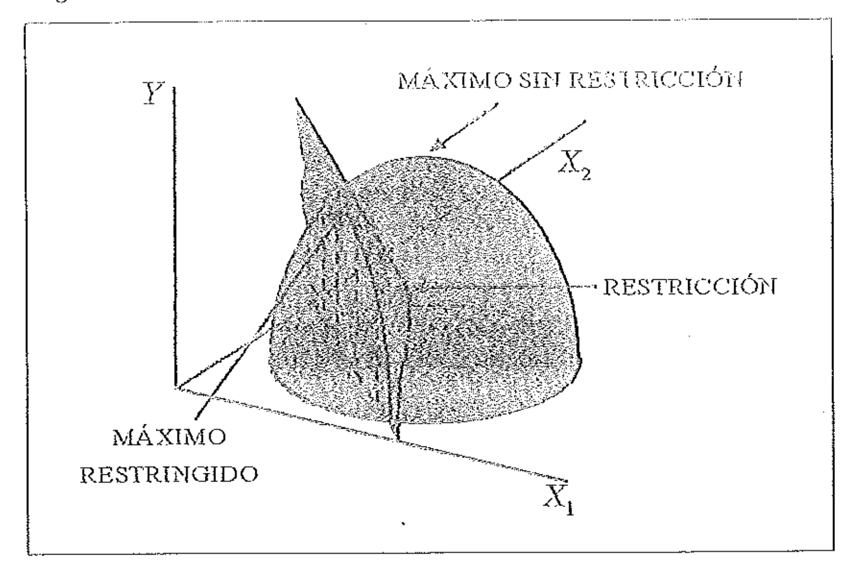
Se van a estudiar situaciones del tipo:

$$\begin{aligned} &\max/\min \quad f(x_1, x_2) \\ &\text{sujeto a } g(x_1, x_2) = b \end{aligned} \qquad [11]$$

En este caso existe una *función objetivo*, $f(x_1,x_2)$, que se quiere optimizar pero con la particularidad de que los valores (x_1^*,x_2^*) deben cumplir también la condición expresada en la *restricción*, $g(x_1,x_2)$, donde b es una constante. Situaciones como ésta son frecuentes en economía cuando se quiere maximizar la utilidad que obtiene un individuo al consumir dos bienes, x_1 y x_2, $U(x_1,x_2)$, pero teniendo en cuenta la restricción presupuestaria a la que se enfrenta el individuo: $10x_1+10x_2=1000$, siendo 10 los precios de los bienes y 1000 la renta del individuo.

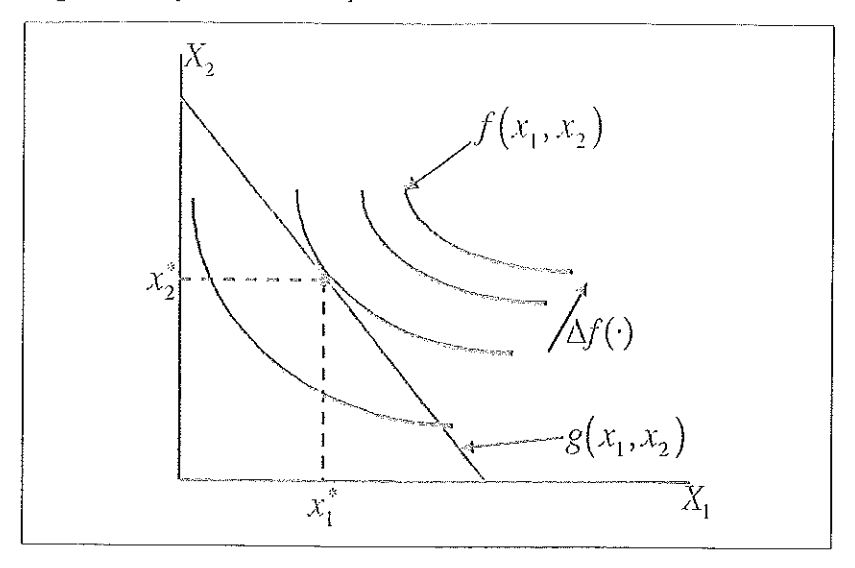
La representación gráfica de este problema sería:

Figura 11. Maximización de la utilidad de un individuo sujeto a restricción



Sin embargo, una forma análoga de representar la misma situación es basarse en las curvas de nivel, donde cada curva representaría un determinado valor de la función. En el caso que nos ocupa, cada curva representaría un determinado nivel de utilidad que aumentaría a medida que se incrementa la cantidad de ambos bienes. La restricción presupuestaria aquí estaría representada por la línea recta. La nueva representación sería:

Figura 12. Representación del problema de maximización con curvas de nivel



A la hora de calcular cuáles son los valores óptimos podemos utilizar varios métodos.

3.2.1 Sustitución

Consistiría en sustituir la restricción directamente en la función objetivo. De esta forma se expresa la función dependiendo de una única variable independiente y se optimiza respecto a ella. El problema se convertiría en:

$$\max/\min f(x_1, x_2(x_1)) \qquad [12]$$

Una vez obtenido el valor óptimo de la variable, en este caso x_1^*, se sustituiría este valor en la restricción y se obtendría x_2^*.

Como ejemplo, consideremos la situación de un individuo que desea maximizar la utilidad que obtiene del consumo de dos bienes, x_1 y x_2, donde su función de utilidad viene dada por la expresión $U = x_1x_2$. El precio del primer bien es de 2 unidades monetarias y el del segundo de 3. Este individuo, además, dispone de una renta de 20 unidades monetarias. El problema de este consumidor es:

$$\begin{aligned} &\max \quad U = x_1x_2 \\ &\text{sujeto a } 2x_1 + 3x_2 = 20 \end{aligned} \qquad [13]$$

El método indicado anteriormente consistiría en incorporar la restricción presupuestaria en la función de utilidad de tal forma que si despejamos x_2 en la restricción y sustituimos en la función de utilidad se obtiene:

$$\max \quad U = x_1\left(\frac{20 - 2x_1}{3}\right) \qquad [14]$$

A partir de estos momentos hay una única variable a maximizar y, por ello, se puede proceder a utilizar el método expuesto en el epígrafe de derivadas. El primer paso consiste en hallar la derivada primera e igualarla a cero.

$$- \; f' = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x_1 = 0$$

de donde obtenemos el valor óptimo, $x_1^* = 5$.

Con el fin de conocer si se trata de un valor máximo o mínimo, acudimos a estudiar el signo de la derivada segunda:

$$- \; f'' = -\frac{4}{3}$$

por lo que se trata de un valor máximo al tener signo negativo.

El siguiente paso consiste en sustituir este valor óptimo en la restricción presupuestaria, 2(5) $+3x_2 = 20$ y despejar x_2 para obtener el valor óptimo de la segunda variable,

$$x_2^* = \frac{10}{3}.$$

Por último, si se desea hallar cuál es el valor de utilidad asociado con ese consumo óptimo, sólo se tendrá que sustituir estos valores en la función, obteniéndose un nivel de utilidad de

$$U^* = \frac{50}{3}.$$

Sin embargo, este método presenta el problema que en ocasiones la técnica de sustitución puede ser muy compleja por la existencia de varias restricciones o porque la restricción sea muy complicada haciendo que sea casi imposible sustituir una variable en términos de otra. Por ello, es preferible recurrir al método que se detalla a continuación.

3.2.2 Método de los multiplicadores de Lagrange

Este método consiste primero en definir una función auxiliar:

$$L = f(x_1, x_2) - \lambda(g(x_1, x_2) - b) \qquad [15]$$

donde λ recibe el nombre de *multiplicador de Lagrange* y su valor nos indica en cuánto varía el valor de la función objetivo al variar el parámetro b.

Los valores óptimos (x_1^*, x_2^*) deberán satisfacer las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad [16]$$

El resultado final, en este caso, se alcanzará tras resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que es fácilmente resoluble.

Si existiese más de una restricción bastaría con añadir tantos nuevos multiplicadores como restricciones y las nuevas condiciones de primer orden, esto es, que la derivada parcial de la función lagrangiana respecto a cada uno de los nuevos multiplicadores fuese cero.

Si aplicamos esta técnica al problema del consumidor anterior nos encontraríamos con:

$$L = f(x_1,x_2) - \lambda(2x_1 + 3x_2 - 20) \qquad [17]$$

y las condiciones de primer orden serían:

- $\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda = 0$

- $\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 3\lambda = 0$

- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x_1 - 3x_2 + 20 = 0$

Tras resolver este sistema de ecuaciones obtenemos los valores óptimos,

$$x_1^* = 5,\ x_2^* = \frac{10}{3},\ \lambda^* = \frac{20}{12} \text{ y } U^* = \frac{50}{3}$$

que coinciden con los obtenidos por el método anterior.

Es conveniente resaltar que la derivada parcial de la función lagrangiana respecto al multiplicador no es más que la restricción. Por otra parte, si dividimos las derivadas parciales respecto a las dos variables, obtenemos la condición de optimalidad respecto al consumo que indica que la *Relación Marginal de Sustitución* en el óptimo se iguala al cociente de precios.

$$RMS \equiv \frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} = \frac{p_1}{p_2} \qquad [18]$$

4. VALOR FUTURO O CAPITALIZADO Y VALOR ACTUAL O DESCONTADO

4.1 Valor futuro o capitalizado

Por *capitalizar* se entiende el expresar en términos de unidades de una magnitud futura una magnitud presente. Esta aplicación es importante si se quiere conocer el valor futuro de una variable, por ejemplo, cuál será el valor futuro de un capital presente x_1.

- *Valor futuro simple*: los intereses se aplican sobre el capital inicial. El subíndice indicará el período de aplicación y r será el tipo de interés. Si consideramos que partimos del período 1, entonces:

– En el período 2 el capital será: $x_2 = x_1 + x_1 r_1 = x_1(1 + r_1)$

– En el período 3: $x_3 = x_2 + x_1 r_2 = x_1(1 + r_1) + x_1 r_2 = x_1(1 + r_1 + r_2)$

– En el período n:

$$x_n = x_1\left(1 + \sum_{t=1}^{t=n-1} r_t\right) \qquad [19]$$

donde t indica el período.

En el caso de tener un tipo de interés igual en todos los períodos, el valor del capital en el período n será:

$$x_n = x_1(1 + nr) \qquad [20]$$

- *Valor futuro compuesto*: los intereses se aplican sobre el capital acumulado hasta ese período, por tanto:

– En el período 2 el capital será: $x_2 = x_1 + x_1 r_1 = x_1(1 + r_1)$

– En el período 3: $x_3 = x_2 + x_2 r_2 = x_1(1 + r_1) + (x_1(1 + r_1))r_2 = x_1(1 + r_1)(1 + r_2)$

– En el período n:

$$x_n = x_1 \prod_{t=1}^{t=n-1} (1 + r_t) \qquad [21]$$

De nuevo, en el caso de tipos de interés idénticos en todos los períodos, el valor del capital en el período n será:

$$x_n = x_1(1 + r)^n \qquad [22]$$

- *Valor futuro continuo*: Hasta ahora se ha considerado que los intereses se pagan una vez por período, supongamos una vez al año. Si se pagasen mensualmente, el tipo de interés mensual sería $r/12$ con $12n$ pagos. Es decir, que el

valor de un capital en n años y considerando capitalización compuesta y pago mensual de intereses sería $x_1(1 + r/z)^{zn}$. En general, con pagos de z veces por período se obtendría $x_1(1 + r/12)^{12n}$ y en el límite, con z tendiendo a infinito, es decir, valor futuro continuo, el capital final será:

$$x_n = x_1 e^{rn} \qquad [23]$$

donde $e^{rn} = \lim_{z \to \infty} (1 + r/z)^{zn}$.

4.2 Valor actual o descontado

Por *descuento* se entiende el expresar una magnitud disponible en el futuro en términos de una magnitud disponible en el presente. Una aplicación es el poder calcular el valor actual de una corriente de rentas. Supongamos que un individuo va a recibir un flujo constante de rentas durante n períodos y quiere conocer cuál es su valor actual. Lo primero que se debe tener en cuenta es que el valor actual de una sucesión de valores no es más que la suma descontada de cada uno de esos valores. Así:

- El valor actual de una renta presente es su propio valor, esto es: $V.A._1 = x_1$
- El valor actual de una renta a cobrar en el siguiente período es:

$$V.A._1 = \frac{x_2}{(1 + r_1)}$$

- El valor actual de una renta a cobrar en el período 3 es:

$$V.A._1 = \frac{x_3}{(1 + r_1)(1 + r_2)}$$

- El valor actual de una renta a cobrar en el período n es:

$$V.A._1 = \frac{x_n}{\prod_{t=1}^{t=n-1} (1 + r_t)}$$

Por tanto, el valor actual de toda la corriente de rentas será:

$$V.A._1 = x_1 + \sum_{t=1}^{t=n-1} \frac{x_{t+1}}{\prod_{t=1}^{t=n-1} (1 + r_t)} \qquad [24]$$

Si el tipo de interés fuese constante a lo largo del tiempo, la expresión pasaría a ser:

$$V.A._1 = x_1 + \sum_{t=1}^{t=n-1} \frac{x_{t+1}}{(1 + r)^t} \qquad [25]$$

Bibliografía

MANUALES RECOMENDADOS

- o PASHIGAN, (1996): *Teoría de los precios*. Mc Graw Hill.
- o FRIEDMAN, (1995): *Teoría de los precios*. Eurolex.
- o VARIAN, (1988): *Microeconomía intermedia*. Antoni Bosch.
- o VILLAR, (1999): *Lecciones de Microeconomía*. Antoni Bosch.
- o MANKIW, (1999): *Principios de Economía*. Mc Graw Hill.
- o SLOMAN, (1996): *Introducción a la Microeconomía*. Prentice Hall.

OTROS MANUALES Y LIBROS DE REFERENCIA.

BLANCO, GONZÁLEZ-BLANCH, BOTE y SALINAS, (1999): *Curso interactivo de microeconomía*. URJC- Editorial Erica.

CASE y FAIR, (1997): *Principios de Microeconomía*. Prentice Hall.

EATON y EATON, (1996): *Microeconomía* (3ª edición). Prentice Hall.

FREIRE Y CUERDO, (1997): *Introducción a la microeconomía*. Esic. Madrid.

HEYNE, (1997): *Conceptos de Economía*. Prentice Hall.

KATZ y ROSEN (1994): *Microeconomía*. Mc Graw Hill.

MOCHÓN, (2001): *Economía: Teoría y Política*. Mc Graw Hill.

NICHOLSON, (1997): *Teoría Microeconómica*. Mc Graw Hill.

PINDYCK y RUDINFELD, (1999): *Microeconomía*. (4ª edición). Prentice Hall.

SAMUELSON, (1993): *Economía*. Mc Graw Hill.

SAMUELSON y NORDHAUS, (1994): *Economía* (14ª Edición). Mc Graw Hill.

WONNACOTT y WONNACOTT (1999): *Economía*. Mc Graw Hill.

• EJERCICIOS Y PRÁCTICAS.

BERGSTROM y VARIAN, (1993): *Ejercicios de Microeconomía Intermedia*. Editorial Antoni Bosch.

BLANCO y GONZÁLEZ-BLANCH, (2000): *Materiales y preguntas de Microeconomía*. Editorial Erica.

BLANCO y FREIRE, (2000): *Prácticas y conceptos básicos de Microeconomía*. ESIC-URJC.
VILLAR, (1999): *Lecciones de Microeconomía*. Antoni Bosch.
TUGORES y FERNÁDEZ DE CASTRO, (1993): *Microeconomía cuestiones y problemas*. Mc Graw Hill.

- SOPORTES DIGITALES.

PROFESOR MANKIW, N. (1999): *Principios de Economía.*

o www.dryden.com/econ/mankiw/

Esta página ofrece recursos, de forma gratuita, tanto a los alumnos como a los profesores que utilicen sus libros a través de nombre y número de usuario. Los recursos que ofrece son entre otros: resúmenes, cuadros, problemas y nuevas lecciones para los alumnos, y para los profesores gráficas para realizar transparencias, más ejemplos para las clases, problemas con solución, etc.

ECON WEB

o www.econweb.com

Esta página que no es gratuita, es un ejemplo de página WEB dirigida expresamente a los alumnos con dos cursos perfectamente estructurados de microeconomía y macroeconomía, a través del desarrollo de lecciones que incluyen gráficas animadas en formato GIF, que ayudan a entender las explicaciones. Los recursos para los profesores son escasos y se centran en actualizar sus conocimientos sobre estas materias.

SAMUELSON.NORDHAUS.

o www.mhhe.com/economics/samuelson

Ofrece servicios parecidos a la del profesor Mankiw, pero está especialmente dirigida a los docentes propocionándoles materiales y consejos didácticos.

- CURSOS EN CD-ROM.

RUN TIME MICROECOMICS CD- ROM. Prentice Hall.
RUN TIME MACROECOMICS CD- ROM. Prentice Hall.

Los programas están estructurado a través de un explorador al cual se le pueden ir añadiendo nuevas entregas. Las lecciones son explicadas por una profesora virtual, que se ayuda de una pizarra para sus explicaciones y las completa con ejercicios resueltos y ejemplos en forma de noticias de periódico. Este curso permite además la búsqueda de un término concreto, usa menús desplegables, y la coordinación entre el video y la pizarra virtual está realmente lograda consiguiendo unas explicaciones muy claras.

CURSO INTERACTIVO DE MICROECONOMÍA-URJC. Editorial Erica.

Autores: BLANCO, BOTE, GONZÁLEZ-BLANCH, SALINAS.

En este libro interactivo se utilizan las tecnologías como Acrobat, transparencias interactivas de Power Point, y la programación en HTML para coordinar de una forma correcta el texto, las gráficas y el audio de las explicaciones. Sus contenidos incluyen once lecciones de microeconomía, apuntes de las lecciones, 99 problemas, desarrollo de los conceptos y técnicas básicas, comentarios sobre el curso y la utilización de la bibliografía, así como un servicio de tutorías vía Internet.

- MANUALES DE MATEMÁTICAS.

CHIANG, (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática* (3.ª edición). McGraw Hill.
SIMON & BLUME, (1994): *Mathematics for economists.* Norton.
LAMBERT, (1998): *Advanced mathematics for economists: Static and dynamic optimization.* Basil Blackwell.

Los últimos años han supuesto una importante renovación y actualización de la mayor parte de los manuales de microeconomía intermedia orientados a la docencia de esta disciplina. Este manual de prácticas intenta ser un material complementario que facilite la asimilación y utilización de los conceptos necesarios para el entendimiento de esta materia. Con este fin, *Prácticas de microeconomía intermedia*, intenta, desde la extensa experiencia docente universitaria de los autores en este campo, abarcar de forma sintética los conceptos y herramientas necesarias, buscando recorrer el análisis práctico del funcionamiento de una economía de mercado, que es el objeto de todo estudio microeconómico actual. La explicación de ejercicios resueltos, el repaso a través de preguntas tipo test y noticias para comentar, junto a un detallado análisis de las técnicas matemáticas básicas para el estudio de la microeconomía, componen la estructura de este libro.

AUTORES

Miguel Angel Alonso
Rafael Barberá
Manuel Blanca
Francisco José Blanco
Luis Miguel Doncel
Nuria Gómez
Miguel González Blanch
Pilar Grau
Rosa Santero

Son todos profesores titulares del área de Economía en la Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de la Universidad Rey Juan Carlos de Madrid.

